Bachillerato General Unificado

MATEMÁTICA

3.º Curso

TEXTO DEL ESTUDIANTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Ministerio de Educación

Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

Matemática

3 BGU

LNS



serie Ingenios

EDITORIAL DON BOSCO

edebé

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Roqueline Arguelles
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 2
Bachillerato segundo curso

Antonio Garrido González
Dirección general

José Luis Gómez Cutillas
Dirección editorial

María Banal Martínez
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé

Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

ISBN 978-9978-71-993-0
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evalaudo por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el el 30 de mayo de 2016.

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

Ministerio de **Educación**

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Ministerio de Educación

Este libro de texto que tienes en tus manos es una herramienta muy importante para que puedas desarrollar los aprendizajes de la mejor manera. Un libro de texto no debe ser la única fuente de investigación y de descubrimiento, pero siempre es un buen aliado que te permite descubrir por ti mismo la maravilla de aprender.

El Ministerio de Educación ha realizado un ajuste curricular que busca mejores oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes del país en el marco de un proyecto que propicia su desarrollo personal pleno y su integración en una sociedad guiada por los principios del Buen Vivir, la participación democrática y la convivencia armónica.

Para acompañar la puesta en marcha de este proyecto educativo, hemos preparado varios materiales acordes con la edad y los años de escolaridad. Los niños y niñas de primer grado recibirán un texto que integra cuentos y actividades apropiadas para su edad y que ayudarán a desarrollar el currículo integrador diseñado para este subnivel de la Educación General Básica. En adelante y hasta concluir el Bachillerato General Unificado, los estudiantes recibirán textos que contribuirán al desarrollo de los aprendizajes de las áreas de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Matemática y Lengua Extranjera-Inglés.

Además, es importante que sepas que los docentes recibirán guías didácticas que les facilitarán enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del contenido del texto de los estudiantes, permitiendo desarrollar los procesos de investigación y de aprendizaje más allá del aula.

Este material debe constituirse en un apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje que, para cumplir con su meta, han de ser guiados por los docentes y protagonizados por los estudiantes.

Esperamos que esta aventura del conocimiento sea un buen camino para alcanzar el Buen Vivir.

Ministerio de Educación

2016

Presentación

Matemática 3 BGU ahora mismo es una página en blanco que, como tú, posee un infinito potencial.

Te presentamos **Ingenios**, el nuevo proyecto de Editorial Don Bosco que hemos diseñado para impulsar lo mejor de ti y que te acompañará en tu recorrido por el conocimiento.

Ingenios:

- Fomenta un aprendizaje práctico y funcional que te ayudará a desarrollar destrezas con criterios de desempeño.
- Propone una educación abierta al mundo, que se integra en un entorno innovador y tecnológico.
- Apuesta por una educación que atiende a la diversidad.
- Refuerza la inteligencia emocional.
- Refleja los propósitos del Ministerio de Educación que están plasmados en el currículo nacional vigente.
- Deja aflorar la expresividad de tus retos.
- Incorpora **Edibosco Interactiva**, la llave de acceso a un mundo de recursos digitales, flexibles e integrados para que des forma a la educación del futuro.
- Es sensible a la justicia social para lograr un mundo mejor.

Matemática 3 BGU te presenta los contenidos de forma clara e interesante. Sus secciones te involucrarán en proyectos, reflexiones y actividades que te incentivarán a construir y fortalecer tu propio aprendizaje. Las ilustraciones, fotografías, enlaces a páginas web y demás propuestas pedagógicas facilitarán y clarificarán la adquisición de nuevos conocimientos.

Construye con **Ingenios** tus sueños.

Índice

0 unidad temática

Una corta revisión

Contenidos



1 unidad temática

Funciones y límites

Objetivos

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

Contenidos



2 unidad temática

Derivadas e integrales

Objetivos

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

Contenidos



3 unidad temática

Álgebra lineal

Objetivos

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

Contenidos



Algebra y funciones (84 - 115)

1. Matrices numérica
   1.1. Concepto
   1.2. Representación
   1.3. Igualdad
   1.4. Tipos de matrices
2. Operaciones con matrices
   2.1. Adición de matrices
   2.2. Multiplicación de una matriz por un número real
3. Matriz identidad
4. Matriz inversa
   4.1. Cálculo de la matriz inversa a partir de la definición
   4.2. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan
5. Ecuaciones lineales
6. Sistemas de ecuaciones lineales
   6.1. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales
   6.2. Notación matricial
7. Método de Gauss
8. Inecuaciones lineales
   8.1. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita
   8.2. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas
   8.3. Sistemas lineales de inecuaciones con dos incógnitas
9. Introducción a la programación lineal
   9.1. Métodos de resolución
   9.2. Tipos de soluciones
10. Aplicaciones de la programación lineal
   10.1.Problema del transporte
   10.2.Problema de la dieta
   10.3.Otras aplicaciones

4 unidad temática

Vectores en el espacio

Objetivos

- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Contenidos



Geometría y medida (120 - 149)

1. Vectores
   1.1. Equipolencia de vectores
   1.2. Vectores libres
2. Operaciones con vectores
   2.1. Adición de vectores
   2.2. Multiplicación por un número real
3. El espacio vectorial R^3
4. Componentes
   4.1. Operaciones con componentes
   4.2. Componentes de un vector determinado por dos puntos
   4.3. Punto medio de un segmento
5. Producto escalar
   5.1. Definición
   5.2. Propiedades del producto escalar
   5.3. Expresión analítica del producto escalar
   5.4. Aplicaciones
6. Producto vectorial
   6.1. Definición
   6.2. Propiedades
   6.3. Expresión analítica
   6.4. Aplicaciones
7. Producto mixto
   7.1. Definición
   7.2. Propiedades del producto mixto
   7.3. Interpretación geométrica
   7.4. Expresión analítica
   7.5. Aplicaciones del producto mixto

5 unidad temática

Geometría en el espacio

Objetivos

- Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Contenidos



Geometría y medida (150 - 179)

6 unidad temática

Probabilidad

Objetivos

- Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Contenidos



Estadística y probabilidad (180 - 212)

Destrezas con criterios de desempeño:

Destrezas	Unidades 1	2	3	4	5	6
• Reconocer el conjunto de matrices $M_{2\times2}$ (R) y sus elementos, así como las matrices especiales: nula e identidad.			✓			
• Realizar las operaciones de adición y producto entre matrices M2×2 (R), producto de escalares por matrices $M_{2\times2}$ (R), potencias de matrices $M_{2\times2}$ (R) aplicando las propiedades de números reales.			✓			
• Calcular el producto de una matriz de $M_{2\times2}$ (R) por un vector en el plano y analizar su resultado (vector y no matriz).			✓			
• Reconocer matrices reales de $m\times n$ e identificar las operaciones que son posibles realizar entre ellas según sus dimensiones.			✓			
• Calcular determinantes de matrices reales cuadradas de orden 2 y 3 para resolver sistemas de ecuaciones.			✓			
• Calcular la matriz inversa A^{-1} de una matriz cuadrada A cuyo determinante sea diferente a 0 por el método de Gauss (matriz ampliada) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.			✓			
• Resolver y plantear problemas reales o hipotéticos que pueden ser modelizados con derivadas de funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, juzgando la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.	✓					
• Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones polinomiales de grado ≤ 4 con apoyo de las TIC.	✓					
• Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función polinomial de grado ≤ 4 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).	✓					
• Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado ≤ 2 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets)	✓					
• Resolver aplicaciones reales o hipotéticas con ayuda de las derivadas de funciones polinomiales de grado ≤ 4 y de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado ≤ 2 y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.	✓					
• Conocer y aplicar el álgebra de límites de sucesiones convergentes en la resolución de aplicaciones o problemas con sucesiones reales en matemática financiera (interés compuesto) e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.			✓			
• Reconocer y graficar las funciones escalonadas para calcular el área encerrada entre la curva y el eje X.			✓			
• Realizar las operaciones de suma y multiplicación de funciones escalonadas y de multiplicación de números reales por funciones escalonadas aplicando las propiedades de los números reales.			✓			
• Calcular la integral definida de una función escalonada, identificar sus propiedades cuando los límites de integración son iguales y cuando se intercambian los límites de integración.			✓			
• Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x.			✓			
• Calcular la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 aproximando el cálculo como una sucesión de funciones escalonadas.			✓			
• Reconocer la derivación y la integración como procesos inversos.			✓			
• Aplicar el segundo teorema del cálculo diferencial e integral para el cálculo de la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 (primitiva).			✓			
• Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.			✓			
• Reconocer y graficar funciones exponenciales analizando sus características: monotonía, concavidad y comportamiento al infinito.	✓					
• Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas con ayuda de las TIC.	✓					
• Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.	✓					
• Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta. R^3					✓	
• Determinar la posición relativa de dos rectas en R^3 (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).					✓	
• Calcular la distancia de un punto P a una recta (como la longitud del vector formado por el punto P y la proyección perpendicular del punto en la recta P´, utilizando la condición de ortogonalidad del vector dirección de la recta y el vector (PP) en la resolución de problemas (distancia entre dos rectas paralelas).					✓	
• Determinar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo como aplicación de la distancia de un punto a una recta.					✓	
• Resolver y plantear aplicaciones de la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta con apoyo de las TIC.					✓	

	Unidades					
	1	2	3	4	5	6
• Aplicar el producto escalar entre dos vectores, la norma de un vector, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores y la proyección ortogonal de un vector sobre otro para resolver problemas geométricos, reales o hipotéticos en R^3.					✓	
• Realizar las operaciones de adición entre elementos de R^3 y de producto por un número escalar de manera geométrica y analítica aplicando propiedades de los números reales y reconocer a los vectores como elementos geométricos de R^3				✓	✓	
• Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar distancia entre dos puntos A y B en R^3 como la norma del vector $\overrightarrow{AB}$.				✓	✓	
• Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección o a partir de dos puntos de la recta y graficarlas en R^3.				✓	✓	
• Determinar la ecuación vectorial de un plano a partir de un punto del plano y dos vectores dirección; a partir de tres puntos del plano; a partir de una recta contenida en el plano y un punto.				✓	✓	
• Determinar la ecuación de la recta formada como intersección de dos planos como solución del sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones de los planos.				✓	✓	
• Determinar si dos planos son paralelos (cuando no hay solución) o perpendiculares (si los vectores normales a los planos son perpendiculares) para resolver aplicaciones geométricas en R^3				✓	✓	
• Aplicar la divisibilidad de números enteros, el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros y la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas (con soluciones enteras no negativas) en la solución de problemas.			✓			
• Reconocer un subconjunto convexo en R_2 y determinar el conjunto de soluciones factibles de forma gráfica y analítica para resolver problemas de programación lineal simple (minimización en un conjunto de soluciones factibles de un funcional lineal definido en R_2).			✓			
• Realizar un proceso de solución gráfica y analítica del problema de programación lineal graficando las inecuaciones lineales, determinando los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles y encontrar la solución óptima.			✓			
• Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema			✓		✓	
• Realizar operaciones con sucesos: unión, intersección, diferencia y complemento, leyes de De Morgan en la resolución de problemas.						✓
• Aplicar los métodos de conteo: permutaciones, combinaciones para determinar la probabilidad de eventos simples y a partir de ellos la probabilidad de eventos compuestos en la resolución de problemas.						✓
• Identificar variables aleatorias de manera intuitiva y de manera formal como una función real y aplicando la función aditiva de conjuntos, determinar la función de probabilidad en la resolución de problemas.						✓
• Reconocer experimentos en los que se requiere utilizar la probabilidad condicionada mediante el análisis de la dependencia de los eventos involucrados y calcular la probabilidad de un evento sujeto a varias condiciones aplicando el teorema de Bayes en la resolución de problemas.						✓
• Identificar variables aleatorias discretas en problemas de texto y reconocer la distribución de Poisson como ejemplo de variables aleatorias discretas y sus aplicaciones.						✓
• Reconocer un experimento de Bernoulli en diferentes contextos (control de calidad, análisis de datos, entre otros) y la distribución binomial en problemas de texto identificando los valores de p y q.						✓
• Calcular probabilidades binomiales con la fórmula (o con el apoyo de las TIC), la media, la varianza de distribuciones binomiales y graficar.						✓
• Analizar las formas de las gráficas de distribuciones binomiales en ejemplos de aplicación con el apoyo de las TIC, y juzgar en contexto la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.						✓
• Determinar la recta de regresión lineal que pasa por el centro de gravedad de la distribución para predecir valores de la variable dependiente utilizando la recta de regresión lineal o calcular otra recta de regresión intercambiando las variables para predecir la otra variable.						✓
• Utilizar el método de mínimos cuadrados para determinar la recta de regresión en la resolución de problemas hipotéticos o reales con apoyo de las TIC.						✓
• Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en el método de mínimos cuadrados al determinar la recta de regresión en la resolución de problemas hipotéticos o reales dentro del contexto del problema con el apoyo de las TIC.						✓

Fuente: *http://goo.gl/xcKMvM (Ministerio de Educación del Ecuador).*

El proyecto de **Matemáticas** 3

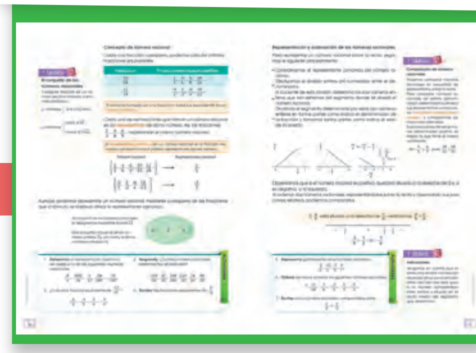
Conoce tu libro

En contexto:



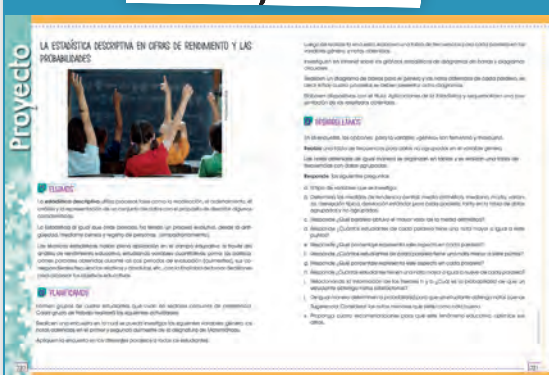
- Noticias y enlaces que contextualizarán la temática a abordar.

Los contenidos



Los contenidos tendrán:
- Situaciones contextualizadas.
- Soporte visual.
- Uso de regletas y ábacos para facilitar la comprensión.

Proyecto



Zona Wifi



- En esta página verás cómo el tema de la unidad es tratado en la red.

Un alto en el camino



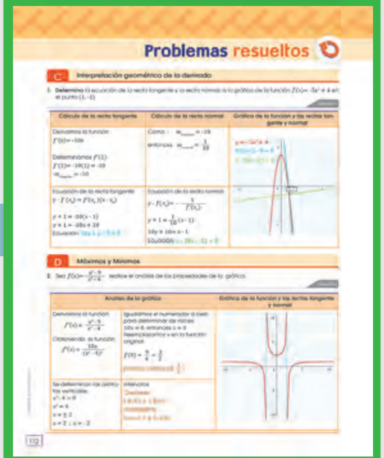
- Actividades de base estructurada.

Resumen



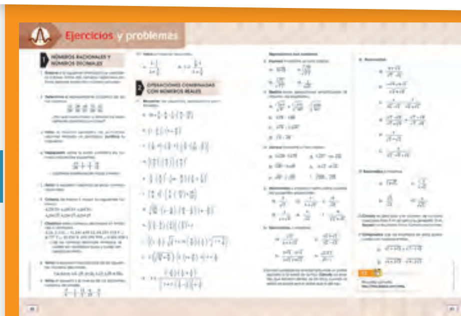
- Síntesis de lo aprendido.

Problemas resueltos



- Énfasis en la presentación clara de los procedimientos.

Ejercicios y problemas



- Para fortalecer tu aprendizaje, dispondrás de varios ejercicios.

Para finalizar

Evaluando tus destrezas



Autoevaluación

- Propuesta al final de cada quimestre.

¿Qué significan estos íconos?

EN GRUPO

Y TAMBIÉN

TICS

Conéctate con: Edibosco Interactiva

Actividades interactivas

Enlaces web

Videos

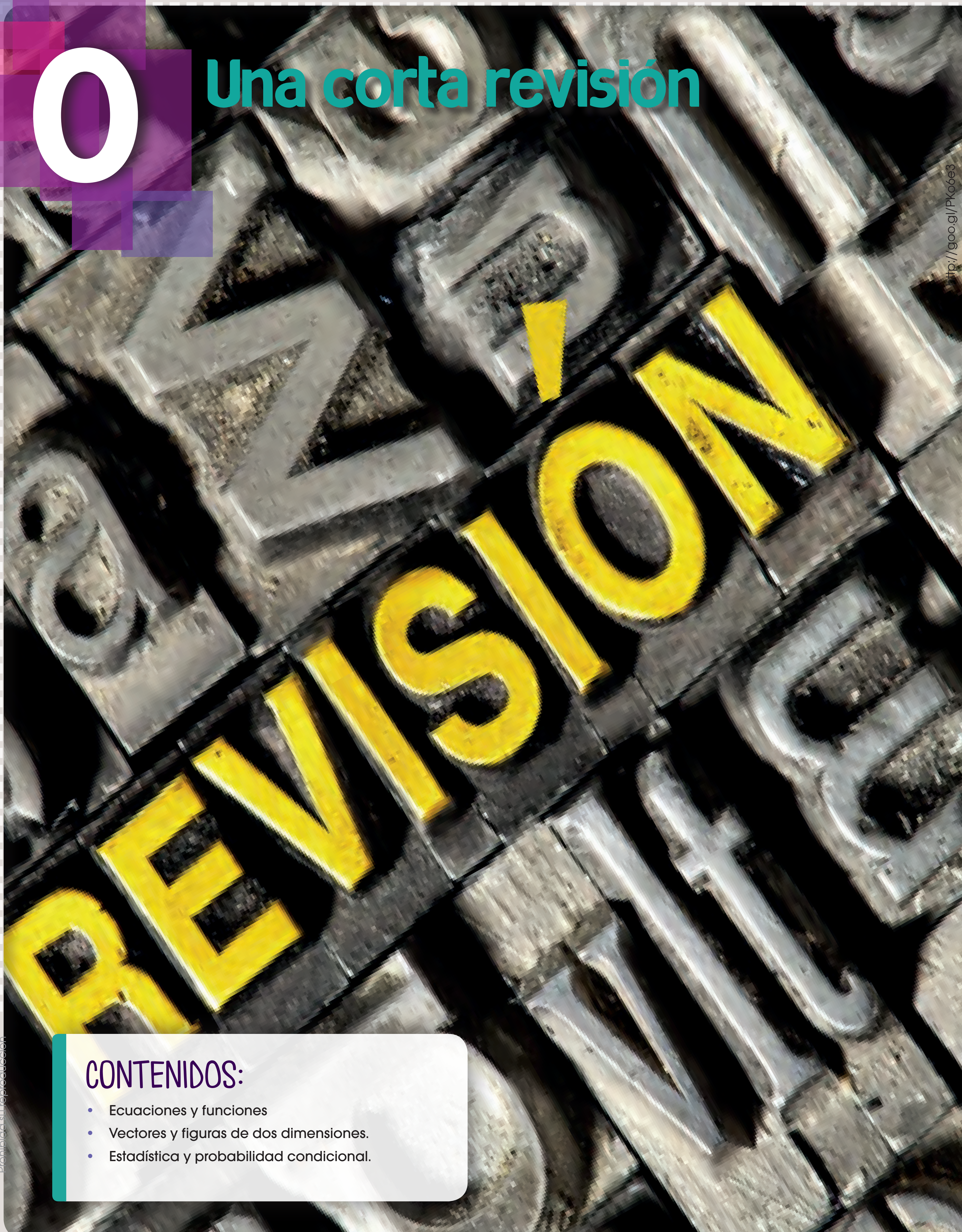
Perfiles interactivos

Documentos

Presentación multimedia

Colaboratorios

0 Una corta revisión



http://goo.gl/PKoe3

CONTENIDOS:

- Ecuaciones y funciones
- Vectores y figuras de dos dimensiones.
- Estadística y probabilidad condicional.

REPASO Y REVISIÓN DE CONTENIDOS

1 Ecuaciones y funciones

1. **Resuelve** las siguientes ecuaciones lineales:

a. $\frac{4x - 3}{2} = \frac{5x + 1}{3}$

b. $\frac{x - 3}{2} + 7 = x - \frac{5 - x}{4}$

c. $\frac{-3(5 - x)}{10} - \frac{3x}{2} = 7 - \frac{5x}{3}$

d. $\frac{3(x + 1)}{2} - x = \frac{x - 4}{3}$

e. $\frac{x + 2}{2} - 3(x + 1) = \frac{-5x}{2} - 2$

2. **Determina** el conjunto solución para $x \in \mathbb{R}$.

a. $9x^3 - \frac{4}{5}x^2 + x - 3 = 68$

b. $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 3 = 7$

3. **Halla** el valor de k sabiendo que el polinomio $Q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - k$ es múltiplo de $x - 3$.

4. **Escribe** una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean las siguientes.

a. $x_1 = 1, x_2 = 4$

b. $x_1 = 2, x_2 = -1$

c. $x_1 = 3, \; x_2 = 7$

d. $x_1 = -11, x_2 = 0$

e. $x_1 = x_2 = -2$

5. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} ① \; x + y + z = 4 \\ ② \; 2x + y + 3z = -2 \\ ③ \; 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} ① \; x - y + z = 1 \\ ② \; x + y - z = -1 \\ ③ \; x + y + z = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} ① \; x + y + z = 3 \\ ② \; 3x + y - 2z = -1 \\ ③ \; x + 2y - z = -5 \end{cases}$

6. El polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$; y cumple lo siguiente.

$P(1) = 0; \; P(-2) = 12; \; P(3) = 2$

Halla a, b y c.

7. **Determina** el dominio y recorrido de estas funciones en $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = 2x - 1$

b. $f(x) = 3x^2$

c. $f(x) = \frac{1}{x}$

d. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

8. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ y $g(x) = x - 2$, **calcula:**

a. $(f + g)(x)$

b. $(f - g)(x)$

c. $(f \cdot g)(x)$

d. $\frac{f(x)}{g(x)}$

9. **Demuestra** si la función es biyectiva

$f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$; $x \neq 2$. Si no lo es, redefina su dominio y rango. Finalmente, calcula la inversa de la función.

10. **Halla** las asíntotas de las funciones siguientes.

a. $f(x) = \frac{12x^5 + 2x - 1}{2x^5 + 7}$

b. $f(x) = \frac{x + 8}{2x^3 + 4}$

c. $f(x) = \frac{-3x + 5}{2x + 9}$

d. $f(x) = \frac{3x^4 + 3x - 1}{2x + 9}$

11. **Estudia** la continuidad de:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 2 & \text{si } 3 < x \leq 4 \\ \frac{1}{x - 4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

2 Vectores y figuras en dos dimensiones

12. Sabemos que $\tan \alpha = -2$ y $\pi/2 < \alpha < 180°$. **Halla** el seno y el coseno de. α, $180°-\alpha$ y $2\pi-\alpha$.

13. Las componentes rectangulares de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (-1, 3)$ y $\vec{v} = (2, -2)$. **Calcula** las componentes de:
    a. $\vec{u} + \vec{v}$
    b. $-\frac{1}{3}\vec{v}$
    c. $-2\vec{u} + 4\vec{v}$
    d. $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$

14. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $(1, 3)$ y $(-2, 5)$. **Calcula**.
    a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$
    b. $|\vec{u}|$
    c. $|\vec{v}|$
    d. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

15. **Halla** las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A = (1, 3)$ y $B = (-5, 5)$.

16. **Determina** la posición relativa de las rectas r y s de ecuaciones $-x + y = -1$ y $2x + 3y + 3 = 0$.

17. **Determina** la posición relativa de las rectas r y s de ecuaciones $-x + y = 1$ y $2x - 2y = -2$.

Y TAMBIÉN: ¿?

Razones trigonométricas del ángulo α

$$\text{Seno } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Coseno } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Tangente } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{Cotangente } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{Secante } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{Cosecante } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

18. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 2)$ y es paralela a la recta de ecuación:
$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3}$$

19. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por $(0, 5)$ y es paralela a la recta de ecuación $y = -2x + 1$.

20. **Halla** la distancia entre la recta r: $4x - 3y + 1$ y el punto $P = (-1, 2)$.

21. **Halla** la distancia entre las rectas r: $2x + 3y - 4 = 0$ y s: $2x + 3y + 7 = 0$.

22. **Averigua** si los puntos A, B y C están alineados.
    a. $A = (0, 3)$, $B = (1, 1)$, $C = (-1, 5)$
    b. $A = (-1, 3)$, $B = (4, 0)$, $C = (2, 6)$

23. **Encuentra** el valor de m para que los puntos $A = (2, -1)$, $B = (0, 2)$ y $C = (-1, m)$ estén alineados.

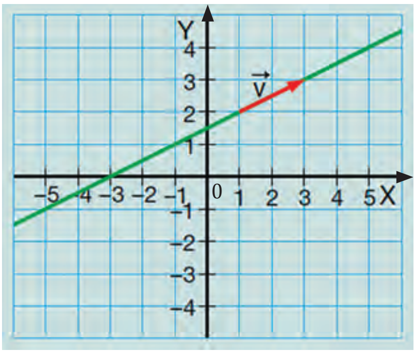
24. **Escribe** en todas las formas la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-5, 3)$ y que tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1)$.

25. Una recta pasa por el punto A $(3, -2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Determina gráficamente si el punto B $(5, 3)$ pertenece a la recta.

26. Una recta pasa por el punto A $(-1, 2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
    a. **Calcula** gráficamente las coordenadas de otros dos puntos de la recta.
    b. **Calcula** la pendiente de la recta.
    c. **Determina** la ecuación de la recta.

27. **Calcula** la ecuación de la recta que pasa por el punto A $(-3, 3)$ y tiene por vector director $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

28. **Determina** la ecuación de la recta de la figura.



29. **Determina** el coseno del ángulo que forman las rectas r y s cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$r: x - 4 = \frac{y+3}{2} \; ; \; s: x - 1 = \frac{y+4}{3}$$

30. **Escribe** la ecuación general de la circunferencia de centro $C = (1,3)$ y radio 5.

31. **Halla** la ecuación de la circunferencia si uno de sus diámetros tiene como extremos los puntos $A = (-3, -7)$ y $B = (2, 5)$.

32. El eje mayor de una elipse mide 6 cm y su distancia focal, 4 cm. ¿Cuánto mide el eje menor?

33. **Halla** la ecuación reducida de la elipse de focos $F = (3, 0)$ y $F' = (-3, 0)$ y cuyo eje mayor mide 10 cm.

34. El eje real de una hipérbola mide 6 cm y su eje imaginario, 8 cm. ¿Cuánto mide la distancia focal?

35. **Comprueba** si las siguientes ecuaciones representan circunferencias y, en tal caso, **halla** el centro y el radio.

a. $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 3 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 14 = 0$

36. **Halla** la ecuación reducida de la hipérbola de focos $F = (4, 0)$ y $F' = (-4, 0)$ y cuyo eje real mide 6 cm.

3 Estadística y probabilidad condicionada

37. **Halla** las probabilidades de los sucesos, C^c, $C \cap C^c$, y $A \cap B$ sabiendo lo siguiente.

$$P(A) = \frac{1}{4}, \; P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{16}, \; P(C) = \frac{1}{12}$$

38. **Calcula** la probabilidad de que la puntuación obtenida al lanzar un dado sea un 2, sabiendo que la puntuación es un número primo.

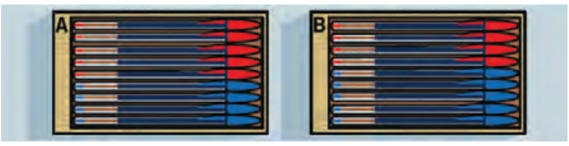
39. La encuesta a un grupo de 160 personas revela que 96 de estas adquieren la revista A; 48, la revista B y 16, la revista C. ¿Cuál es la probabilidad de que, si elegimos dos al azar, sean compradores de la revista A?

40. Un 35% de una clase son seguidores de un grupo musical A; un 30%, de otro grupo B, y a un 15% le gustan ambos grupos. **Calcula** la probabilidad de que al elegir un estudiante al azar.

a. Sea seguidor de B, sabiendo que le gusta A

b. Sea seguidor de ambos grupos, sabiendo que le gusta alguno de los dos.

41. De una bolsa que contiene 9 bolas, numeradas del 1 al 9, extraemos una bola. Si es par, cogemos un bolígrafo de la caja A, y si es impar, cogemos un bolígrafo de la caja B.



Elabora un diagrama en árbol y calcula la probabilidad de coger un bolígrafo rojo.

42. En un determinado experimento aleatorio solo son posibles cuatro sucesos elementales A, B, C y D. Si sabemos que $P(A) = P(B) = P(C)$ y $P(D) = 2 \cdot P(A)$, ¿cuánto vale $P(D)$?.

43. Cogemos al azar una ficha de un dominó y sumamos los puntos. **Halla** la probabilidad de que:

a. La suma de puntos sea 8.

b. La suma de puntos sea un cuadrado perfecto.

Y TAMBIÉN:

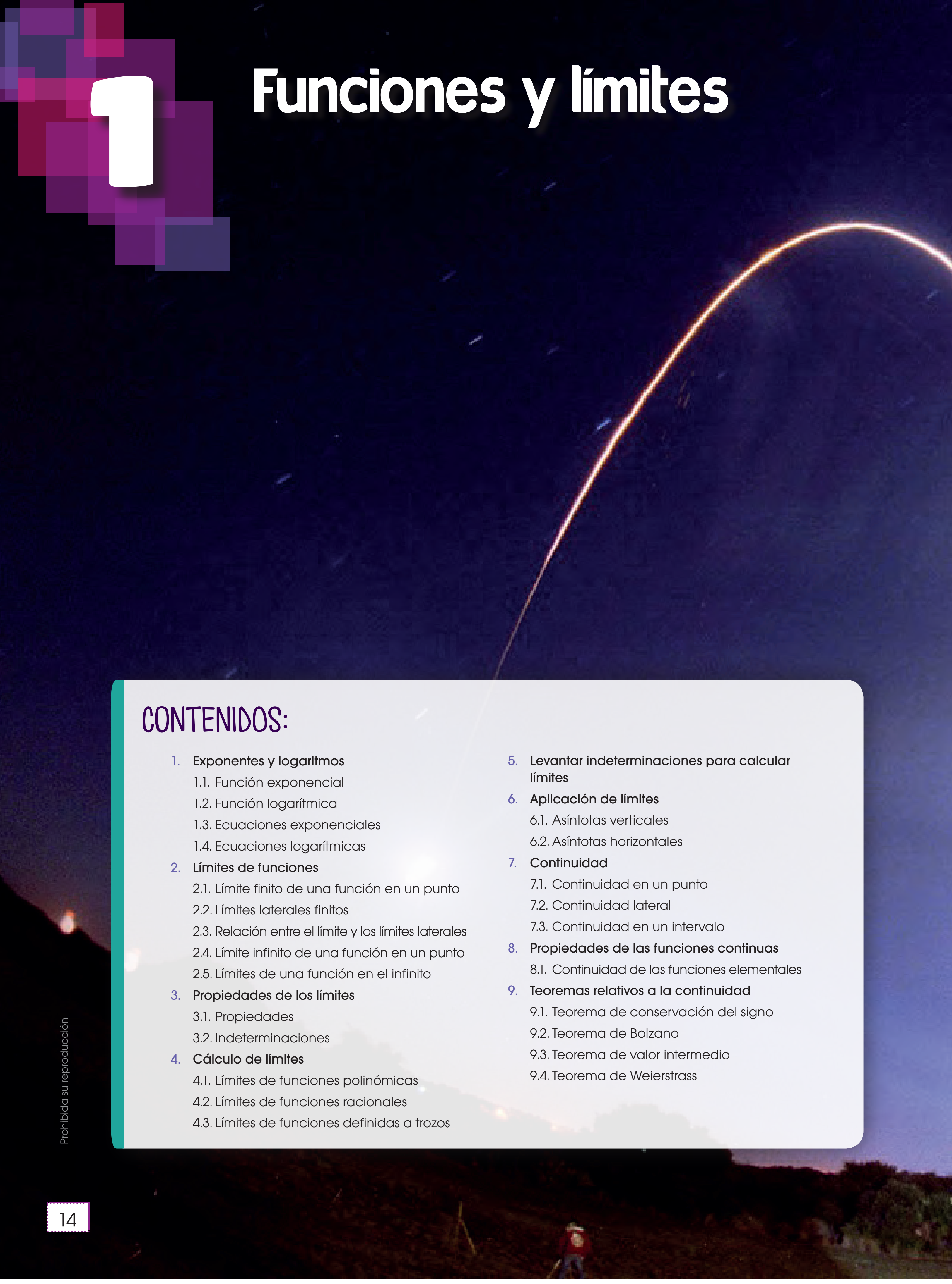
Ecuaciones cónicas:

Circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$

Elipse:
- (Centro de origen) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (Otro centro) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Hipérbola:
- (Centro de origen) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (Otro centro) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Parábola → $y^2 = 2px$



1 Funciones y límites

CONTENIDOS:



http://goo.gl/Uwnv0P

En Internet:

El estudio de funciones muchas veces requiere aproximar resultados cuando x toma valores muy grandes. En el link http://goo.gl/DdmnTB encontrarás un problema elaborado por la NASA acerca de la relación entre un protón de alta energía y un electrón.

Libro:

Si necesitas refuerzo en los temas de esta unidad, acude al libro que encontrarás en el siguiente enlace: http://goo.gl/TJt4bF.

EN CONTEXTO:

La imagen nos muestra la trayectoria de un cohete espacial desde su despegue hasta que sale de la atmósfera terrestre. Como podemos observar, el cohete parte de una posición vertical, y lentamente curva. En esta unidad aprenderemos a predecir la trayectoria de una función mientras avanza, lo cual es útil para modelar varios eventos como el viaje de este cohete a través del espacio.

1. EXPONENTES Y LOGARITMOS

Antes de entrar al estudio de sus funciones, daremos un repaso al uso y propiedades de los mismos.

Exponentes

Dados dos números reales $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos a la potencia enésima de *a* como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n factores}}$$

Si $a \neq 0$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Podemos representar una raíz mediante exponentes fraccionarios.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,;\; n \in \mathbb{N}, n \neq 1, a > 0$$

Logaritmos

Recuerda ahora que el logaritmo de un número es el exponente al que debemos elevar la base para obtener ese número.

Dados dos números $a, n \in \mathbb{R}$ siendo $a > 0$, $a \neq 1$ definimos el logaritmo de a base n, denotado por $\log_n a$ como:

$$\log_n a = b \leftrightarrow n^b = a\,,\; n > 0, n \neq 1$$

CALCULADORA

Las calculadoras científicas disponen de las teclas log y ln que permiten hallar los logaritmos decimales y naturales de un número positivo.

log 2 , 3 = 0.3617

ln 4 7 = 3.8501

Y TAMBIÉN: ¿?

El logaritmo cuya base es 10 se llama logaritmo decimal.

El logaritmo cuya base es el número e sé llama logaritmo natural

Propiedades

Exponentes	Logaritmos
1. El producto de potencias de igual base es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a \in \mathbb{R}$ 2. La potencia de otra potencia es igual a la base elevada a todos los exponentes multiplicados. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $a, n, m \in \mathbb{R}$ 3. Cualquier número diferente a cero elevado al exponente 0 es igual a 1. $a^0 = 1$; $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ 4. 0 elevado a cualquier potencia, menos 0, es igual a 0. $0^a = 0$; $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$	1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. $\log_n(a \cdot b) = \log_n a + \log_n b$ $\quad a, b > 0$; $n > 0$ 2. El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base. $\log_n a^b = b \cdot \log_n a$ $\quad a, b, n \in \mathbb{R}$; $a, n > 0$ 3. El logaritmo de una fracción es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. $\log_n a/b = \log_n a - \log_n b$ $\quad a, b, n \in \mathbb{R}$; $a, n > 0$ 4. El logaritmo de la base es 1. $\log_a a = 1 \Rightarrow \ln e = 1$ 5. El logaritmo de 1 es siempre 0. $\log_a 1 = 0$ 6. $a^{\log_a x} = x \;\Rightarrow\; e^{\ln x} = x$ 7. $\log_a a^x = x \;\Rightarrow\; \ln e^x = x$

Tabla 1.

1.1 Funciones exponenciales

En un cultivo de bacterias *nitrobacter agilis*, un ejemplar se divide aproximadamente en dos cada día. Si queremos averiguar la población descendiente de este ejemplar al cabo de dos días, o después de un mes, tendremos que calcular las siguientes potencias.

- Al cabo de dos días: $2^2 = 4$ individuos
- Al cabo de un mes: $2^{30} = 10737 \cdot 10^9$ individuos

Por lo tanto la función se expresa: $f(x) = 2^x$

Podemos definir la función:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow f(x) = a^x, \text{ donde } a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

> A la función que asigna a la variable independiente x el valor $f(x)=a^x$ la llamamos función exponencial de base a, donde a es un número real positivo diferente de 1.

Así, por ejemplo, las funciones $f(x) = 3^x$ y $h(x) = 0{,}8^x$ son funciones exponenciales de base 3 y 0,8, respectivamente.

En particular, la función exponencial de base e, $f(x) = e^x$, es especialmente importante, ya que describe múltiples situaciones reales: evolución de poblaciones, fenómenos de desintegración radiactiva...

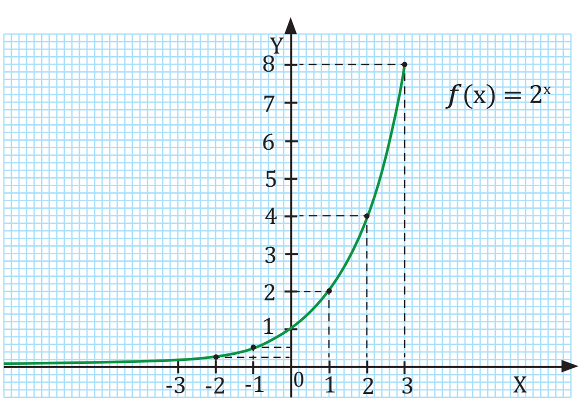
La gráfica de las funciones exponenciales varía según la base a sea mayor o menor que 1. **Observa** las gráficas.

Y TAMBIÉN: ¿?

Observa que la relación que existe entre el número de descendientes y los días transcurridos es una función dada por una potencia de base 2. Esta función la llamamos función exponencial de base 2 y la escribimos $f(x) = 2^x$.

Gráfica de la función $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Gráfica de la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

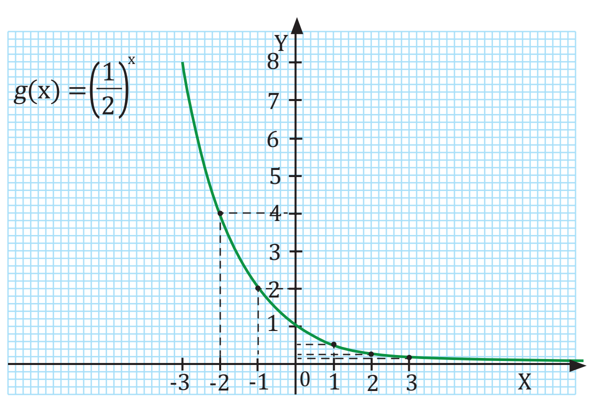


Tabla 2.

Podemos definir la función biyectiva: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \rightarrow f(x) = b^x$$

Las funciones exponenciales $f(x) = a^x, a > 1$, y $g(x) = b^x, 0 < b < 1$ presentan gráficas similares las de las funciones que acabamos de estudiar, $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

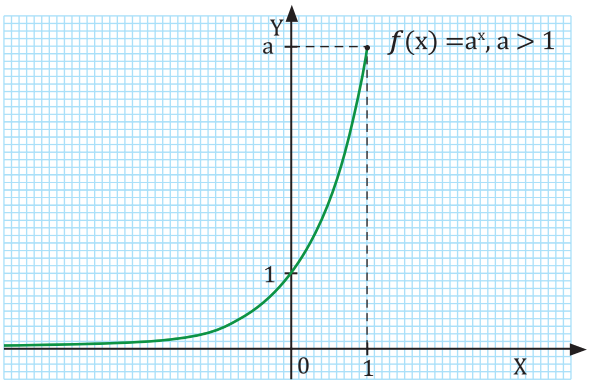
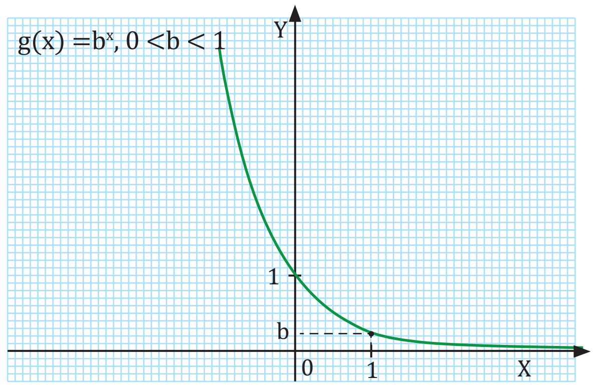
Gráfica de la función $f(x) = a^x, a > 1$	Gráfica de la función $g(x) = b^x, 0 < b < 1$
	

Tabla 3.

Propiedades	
• **Dominio**: $D(f) = \mathbb{R}$ • **Recorrido**: $R(f) =]0, +\infty)$ • **Acotación**: Está acotada inferiormente por 0. • Intersecciones con los ejes: eje OY en el punto $(0, 1)$, ya que $a^0 = 1$. • **Continuidad**: Es continua en $\mathbb{R}$. • **Tendencia**: La recta $y \rightarrow 0$ es una asíntota horizontal. Si $a > 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ Si $0 < a < 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$	• **Periodicidad**: No es periódica. • **Simetría**: No es simétrica. • **Crecimiento y decrecimiento**: Es estrictamente creciente si $a > 1$, y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$. • **Extremos relativos**: No tiene. • **Inyectividad**: Es inyectiva, puesto que cualquier recta horizontal que tracemos sobre la gráfica la intercepta como máximo en un punto. Esto es si $f(x_1) = f(x_2)$ Entonces $x_1 = x_2$ • **Sobreyectividad**: No es sobreyectiva, pues el recorrido no es $\mathbb{R}$. Por tanto f no es biyectiva.

Tabla 4

Actividades

1. **Representa** en un mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ b. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

   c. $h(x) = 3^x$

2. **Representa** en diferentes planos cartesianos.

   a. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ b. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

   c. $h(x) = 3^x$

3. **Contesta**: ¿Cuál de los dos procedimientos anteriores nos permiten analizar mejor las funciones?

1.2 Funciones logarítmicas

Como vimos, el número de descendientes de un ejemplar de bacteria *nitrobacter agilis* al cabo de t días es 2^t. Si queremos averiguar los días que deben transcurrir hasta tener, por ejemplo, 32 768 descendientes, tendremos que hallar el valor de t para el cual $2^t = 32\,768$.

Según la definición de *logaritmo*, tenemos que:

$$2^t = 32\,768 \rightarrow t = \log_2 32\,768$$

Su dominio es los reales positivos, y su rango son todos los reales. Es decir, $D(f) = \mathbb{R}^+$ y $I(f) = \mathbb{R}$.

Y TAMBIÉN: ¿?

Observa que, si a un valor de x le aplicamos la función exponencial en base a y, a continuación, la función logarítmica en base a, obtenemos de nuevo x. Es decir:

$$\log_a(a^x) = x$$

En general, el número de días que habrán de transcurrir hasta tener un número x de individuos, x, será de $t = \log_2 x$.

Vemos, pues, que dicho número de días es una función que viene dada por el logaritmo en base 2 de un número. A esta función la llamamos *función logarítmica en base* 2 y la escribimos $f(x) = \log_2 x$.

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x) = \log_a x$$

A la función que asigna a la variable independiente x el valor $f(x) = \log_a x$ la llamamos función logarítmica en base a, donde a es un número real positivo diferente de 1.

Análogamente se cumple que $a^{\log_a x} = x$. Vemos entonces que las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones inversas.

Igual que la gráfica de las funciones exponenciales, la gráfica de la función logarítmica varía según la base a sea mayor o menor que 1.

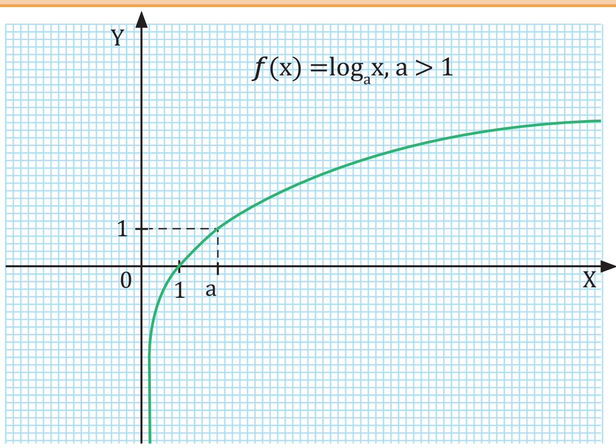
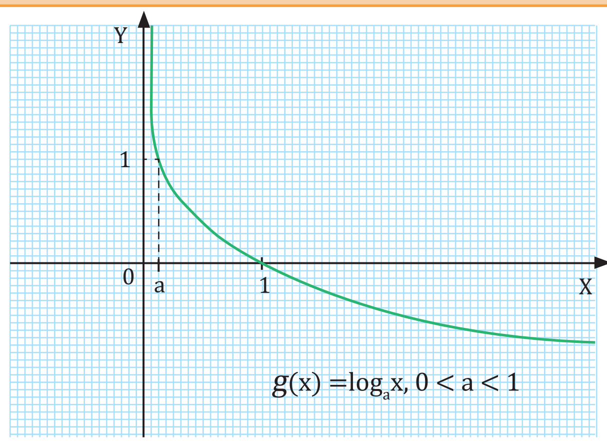
Gráfica de la función $f(x) = \log_a x,\ a > 1$	Gráfica de la función $g(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$
	

Tabla 5.

Actividades

4. **Representa** en el mismo sistema de coordenadas:

a. $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ b. $g(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ c. $y(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$

1.3 Ecuaciones exponenciales

Y TAMBIÉN: ¿?

Si hacemos el cambio ax =t por las propiedades de las potencias, se tiene:

$a^{nx} = (a^n)^x = (a^x)^n = t^n$

$a^{x+n} = a^x \cdot a^n = a^n \cdot t$

$a^{x-n} = \frac{a^x}{a^n} = \frac{t}{a^n}$

Observa la expresión $2^x = 32\,768$.

Se trata de una ecuación cuya incógnita aparece en un exponente.

Llamamos ecuaciones exponenciales a aquellas ecuaciones cuya incógnita aparece en el exponente de una potencia.

Para resolver una ecuación exponencial, además de la definición y las propiedades de las potencias y los logaritmos, utilizaremos:

- La inyectividad de las funciones exponenciales:

  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ lo que equivale a $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

  La inyectividad permite convertir una ecuación exponencial en otra ecuación cuya resolución es más sencilla.

- Un cambio de variable: en general $a^x = t$.

  Este cambio de variable permite convertir una ecuación exponencial, cuya incógnita es x, en otra ecuación, cuya incógnita es t, y de resolución más sencilla.

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $2^x = 32\,768$.

Escribiremos en forma de potencias de la misma base los dos miembros de la ecuación. Para ello descompondremos en factores primos el número 32 768.

Obtenemos $32\,768 = 2^{15}$, de donde resulta $2^x = 2^{15}$.

Así pues, por la inyectividad de las funciones exponenciales, tenemos que $x = 15$.

Observa que este resultado coincide con el logaritmo en base 2 de 32 768.

Ejemplo 2

Resuelve la ecuación $2^{3x} = 11$.

Tomamos logaritmos decimales en ambos miembros de la ecuación:

$\log 2^{3x} = \log 11$

Por las propiedades de los logaritmos:

$$3x \cdot \log 2 = \log 11$$

Y de aquí:

$$3x = \frac{\log 11}{\log 2} = 3{,}46$$

Luego $x = 1{,}15$.

Ejemplo 3

Resuelve la ecuación $3^{2x-1} - 3x = 18$.

Por las propiedades de las potencias, la ecuación se puede escribir:

$$\frac{3^{2x}}{3} - 3x = 18$$

Efectuaremos el cambio de variable $3^x = t$. De esta forma $3^{2x} = t^2$, por lo que resulta una ecuación cuya incógnita es t:

$$\frac{t^2}{3} - t = 18$$

Eliminando denominadores se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$t^2 - 3t - 54 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $t = 9$ y $t = -6$.

Observa que la solución $t = -6$ no es válida, ya que equivale a la expresión $3x = -6$, y 3x ha de ser siempre un número positivo.

Por tanto, la única solución válida es $t = 9$, o lo que es igual, $3x = 9$.

Escribiendo ambos miembros de la igualdad como potencias de la misma base, tenemos que $3x = 32$.

Luego $x = 2$.

Actividades

5. **Resuelve** las siguientes ecuaciones:

a. $2^{3x-5} = 1\,024$ c. $32^{x^2-5x-3} = 1$ e. $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 112$ g. $7^x = 2$ e. $3^{2x-1} = 112$

b. $\sqrt{4^{-2x+6}} = \frac{1}{8}$ d. $25^{x-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ f. $9^{x-1} - 2 \cdot 3^x - 27 = 0$ h. $5^{x+1} = 6$ f. $6^x + 6^{1-x} + 6^{2-x} + 6^{3-x} = 259$

1.4 Ecuaciones logarítmicas

Observa la expresión $\log x = 2{,}5143$.

Se trata de una ecuación cuya incógnita viene afectada por un logaritmo.

Llamamos ecuaciones logarítmicas a aquellas ecuaciones cuya incógnita viene afectada por un logaritmo.

Para resolver estas ecuaciones utilizaremos, además de la definición y las propiedades de los logaritmos, la inyectividad de las funciones logarítmicas:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$ lo que equivale a $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

La inyectividad permite convertir una ecuación logarítmica en otra ecuación cuya resolución es más sencilla. No obstante, en este caso, debemos rechazar, si las hay, las soluciones de esta última ecuación que al sustituir en la ecuación inicial originen el logaritmo de un número negativo.

Ejemplo 4

Resuelve la ecuación

$\log x = \log 6 + 3 \cdot \log 5 - \frac{1}{2} \cdot \log 9.$

Expresaremos mediante un solo logaritmo de igual base los dos miembros de la ecuación.

De acuerdo con las propiedades del logaritmo de una potencia y el logaritmo de una raíz:

$$\log x = \log 6 + \log 5^3 - \log \sqrt{9}$$

Por la propiedad del logaritmo de un producto:

$$\log x = \log (6 \cdot 5^3) - \log \sqrt{9}$$

Aplicando la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$\log x = \log \frac{6 \cdot 5^3}{\sqrt{9}}$$

Y por la inyectividad de las funciones logarítmicas:

$$x = \frac{6 \cdot 5^3}{\sqrt{9}} \Rightarrow = 250$$

Finalmente, sustituimos el valor hallado en la ecuación del enunciado. Se obtiene:

$$\log 250 = \log 6 + 3 \cdot \log 5 - \frac{1}{2} \cdot \log 9$$

Puesto que no aparecen logaritmos de números negativos, $x = 250$ es solución de la ecuación del enunciado.

Ejemplo 5

Resuelve la ecuación $\log(x + 1) + \log 5 = \log(x - 3)$.

Escribiremos mediante un solo logaritmo de igual base los dos miembros de la ecuación.

Por la propiedad del logaritmo de un producto:

$$\log [(x + 1) \cdot 5] = \log (x - 3)$$

De acuerdo con la inyectividad de las funciones logarítmicas, se obtiene la siguiente ecuación lineal:

$$(x + 1) \cdot 5 = x - 3$$

Hallamos el valor de x:

$5x + 5 = x - 3 \Rightarrow 4x = -8$

Por tanto, $x = -2$.

Finalmente, sustituimos el valor $x = -2$ en la ecuación del enunciado. Se obtiene:

$$\log (-1) + \log 5 = \log (-5)$$

Como ves, aparecen los términos $\log (-1)$ y $\log (-5)$, que no existen.

Así pues, concluimos que la ecuación del enunciado no tiene solución.

Actividades

6. **Resuelve** las siguientes ecuaciones:

a. $\log (6x - 1) - \log (x + 4) = \log x$

b. $\log (x + \sqrt{6}) + \log (x - \sqrt{6}) = 1$

c. $\log_3 9 - \log_3 x = 2$

d. $\ln x = \ln 3 + 2 \ln 4 - \ln 2$

e. $2 \log(x + 2) - \log(5x + 6) = 0$

f. $(x - 1) \log 2 + \log 8 = \log 4$

g. $\log (x - 1) + \log x = \log 10$

h. $5\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 x$

x	$f(x)$
2,9	3,9
2,99	3,99
2,999	3,999
...	...

Tabla 6

x	$f(x)$
3,1	4,1
3,01	4,01
3,001	4,001
...	...

Tabla 7

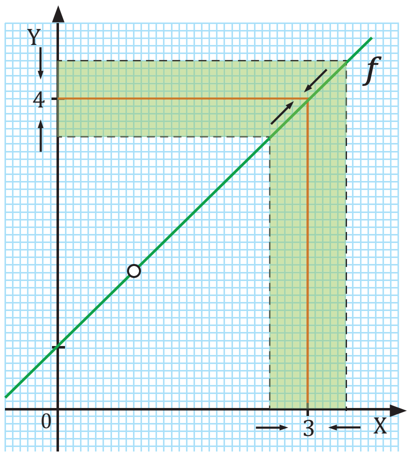


Fig. 1.

2. LÍMITES DE FUNCIONES

Un número real L es el límite de una función $f(x)$cuando x tiende a x_0 si para cualquier número real positivo ε, existe un número real δ, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$. Lo simbolizamos escribiendo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

A menudo nos interesa conocer el comportamiento de una función cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor. Esta información nos la proporcionará el estudio de los límites de dicha función.

2.1 Límite finito de una función en un punto

Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ $x \neq 1 \Rightarrow f(1)$ no existe y el punto de abscisa $x = 3$.

Si elaboramos una tabla (tabla 1 y 2), en la que damos a x valores cercanos a 3, aunque menores, y otra similar con valores cercanos a 3, pero mayores, podemos ver que en ambos casos las imágenes $f(x)$ se encuentran en un entorno de 4.

Podemos llegar a esta misma conclusión si observamos la gráfica de $f(x)$. A medida que estrechamos la franja vertical en torno a 3, la franja horizontal se estrecha también en torno a 4. Decimos entonces que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 3 es 4. Lo simbolizamos escribiendo:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

A continuación, **fíjate** en que el valor de este límite coincide con: $f(3) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 4$, pero no siempre ocurre esto.

Así, si observamos de nuevo la gráfica de $f(x)$, o nos guiamos por las tablas (tablas 3 y 4), podemos ver que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

En este punto; el límite no coincide con su imagen, ya que $f(1)$ no está definida.

Observa que, en ambos casos, si consideramos un entorno cualquiera del límite L, podemos hallar siempre un entorno de x_0 tal que las imágenes de todos los puntos de este, excepto la imagen de x_0, estén contenidas en el primero.

x	$f(x)$
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
...	...

Tabla 8

x	$f(x)$
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
...	...

Tabla 9

2.2 Límites laterales finitos

Considera la función por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x < 2 \\ -x + 3 \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{y el punto } x = 2.$$

Elaboramos una tabla en la que damos a x valores en un entorno de 2, aunque menores; y otra en la que damos a x valores también en un entorno de 2, pero en este caso, mayores. Como podemos observar en la figura, al acercarse x a 2 por la izquierda, las imágenes de $f(x)$ se aproximan a 3. En cambio si nos acercamos por la derecha, las imágenes de $f(x)$ se aproximan a 1.

Decimos que el límite lateral de f cuando x tiende a 2 por la izquierda es 3; y cuando x tiende a 2 por la derecha es 1. Lo simbolizamos escribiendo, respectivamente:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

x	$f(x)$
1,9	2,9
1,99	2,99
1,999	2,999
...	...

Tabla 10

x	$f(x)$
2,1	0,9
2,01	0,99
2,001	0,999
...	...

Tabla 11

Un número real L es el límite lateral de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda (o la derecha) si para cualquier número real positivo ε, existe un número real δ, tal que para todos los puntos $x < x_0$ (o $x > x_0$), si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Lo simbolizamos escribiendo respectivamente:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

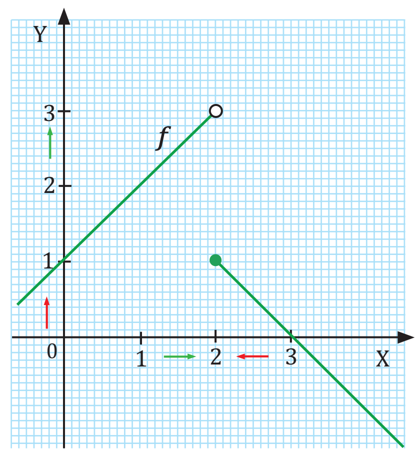


Fig. 2.

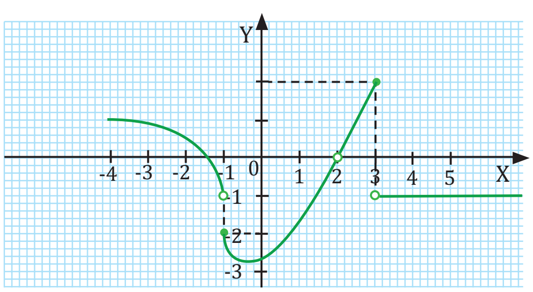
2.3 Relación entre el límite y los límites laterales

Según la definición de límite de una función f en un punto x_0, los valores a los que se aproximan las imágenes por f cuando x se acerca a x_0, tanto por la izquierda como por la derecha, serán iguales.

La condición necesaria y suficiente para que exista el límite de una función en un punto es que existan los dos límites laterales de la función en dicho punto y que ambos coincidan.

Actividades

7. En la figura se representa la función f.



a. $f(-1)$
b. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = L$
c. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = L$
d. $f(2)$
e. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = L$
f. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = L$
g. $f(3)$
h. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = L$
i. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = L$

—**Indica** si existe el límite de la función en los puntos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

2.4 Límite infinito de una función en un punto

Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)^2}$. **Considera** los puntos $x = 1$ y $x = -2$.

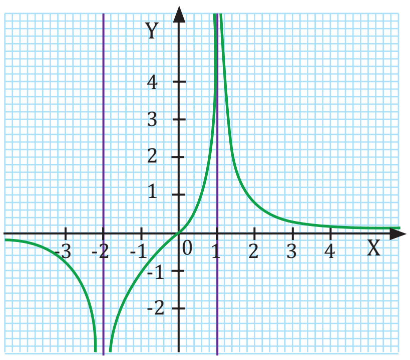


Fig. 3.

x	$f(x)$
0,9	10,7
0,99	1 107,4
0,999	111 074
...	...

Tabla 12

x	$f(x)$
1,1	11,4
1,01	1 114,8
1,001	111 148
...	...

Tabla 13

x	$f(x)$
-2,1	-21,85
-2,01	-2 218,5
-2,001	-222185
...	...

Tabla 14

x	$f(x)$
-1,9	-22,6
-1,99	-2225,9
-1,999	-222559
...	...

Tabla 15

De los resultados en las tablas (tablas 10 - 13) y de la figura 3, deducimos que, a medida que los valores de x se aproximan a 1, tanto por la izquierda como por la derecha, las imágenes $f(x)$ toman valores cada vez mayores.

De igual forma, observamos que, conforme los valores de x se aproximan a -2, por la izquierda y por la derecha, sus imágenes $f(x)$ se hacen cada vez menores.

Decimos entonces que el límite de la función f cuando x tiende a 1 es más infinito (+ ∞) y que el límite de la función f cuando x tiende a -2 es menos infinito (- ∞). Lo simbolizamos escribiendo:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$$

Los límites laterales en un punto también pueden hacerse infinitos.

Si al acercarse x a x_0 por la izquierda las imágenes por f se hacen cada vez mayores (o menores), diremos que el límite lateral de f cuando x tiende a x_0 por la izquierda es más infinito (o menos infinito). Lo simbolizamos (figura 4):

a. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ b. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

Igualmente, al acercarse x a x_0 por la derecha:

c. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ d. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Como en el caso de límites finitos, la coincidencia de límites laterales equivale a la existencia del límite.

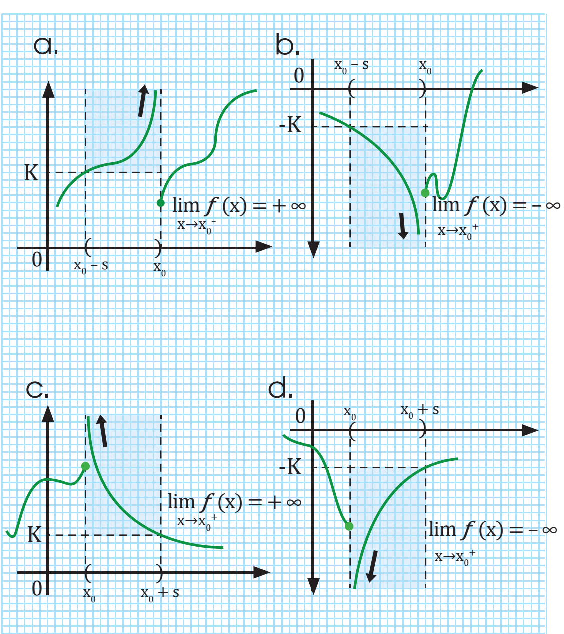


Fig. 4.

Actividades

8. **Calcula** los siguientes límites mediante tablas de valores.

a. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x-5}$ b. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$

2.5 Límites de una función en el infinito

Un número real L es el límite de una función f cuando x tiende a más infinito (menos infinito) si y sólo si para cualquier número real positivo, ε,existe un número real positivo, M, tal que, si x es mayor que M (menor que −M), entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ε.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists M > 0 \mid x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists M > 0 \mid x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

x	$f(x)$
100	−2,023 648 649
1 000	−2,002 336 449
10 000	−2,000 233 364
...	...

Tabla 16

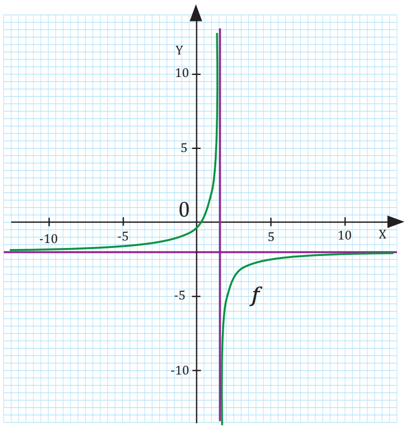


Fig. 5

Límite finito en el infinito

En ocasiones, interesa estudiar el límite de una función cuando la variable x toma valores cada vez mayores o cada vez menores.

Considera la función $f(x) = \dfrac{-6x + 1}{3x - 4}$. De la observación de su gráfica, o mediante cálculo de valores de la imagen, deducimos que, para valores de x cada vez mayores, las imágenes $f(x)$ se aproximan cada vez más a -2. De igual forma, para valores de x cada vez menores, decimos que el límite de la función f cuando x tiende a más (o menos) infinito es -2, y lo representamos así:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$$

Si al tender x a más infinito (o menos infinito) las imágenes por f se aproximan cada vez más a L, diremos que el límite de f cuando x tiende a más infinito (o menos infinito) es L. Lo simbolizamos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

x	$f(x)$
10^2	$3 \cdot 10^4$
10^3	$3 \cdot 10^6$
10^4	$3 \cdot 10^8$
...	...

Tabla 17

x	$f(x)$
-10^2	$3 \cdot 10^4$
-10^3	$3 \cdot 10^6$
-10^4	$3 \cdot 10^8$
...	...

Tabla 18

Límite infinito en el infinito

Considera ahora la función $f(x) = 3x^2$.

De la observación de la gráfica de f, deducimos que, para valores de x cada vez mayores, las imágenes $f(x)$ también toman valores positivos infinitamente grandes. Análogamente, podemos comprobar que, para valores de x cada vez menores, las imágenes también toman valores positivos infinitamente grandes. Decimos que el límite de la función f cuando x tiende a más infinito (o menos infinito) es más infinito, y lo representamos así:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists M > 0\,, x > M \Rightarrow f(x) > k$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists M > 0\,, x < -M \Rightarrow f(x) > k$$

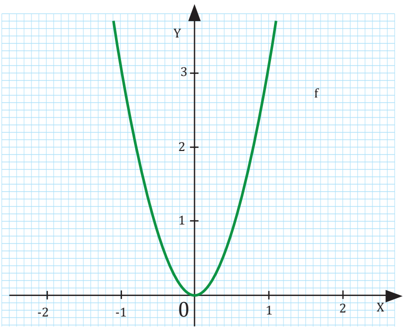


Fig. 6

De la misma forma, si al tender x a más infinito (o menos infinito) las imágenes por f toman valores cada vez menores, diremos que el límite de f cuando x tiende a más infinito (o menos infinito) es menos infinito. Lo simbolizamos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists M > 0\,, x > M \Rightarrow f(x) > -k$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists M > 0\,, x < -M \Rightarrow f(x) > -k$$

3. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Las propiedades de los límites de funciones que enunciaremos a continuación permitirán el cálculo sistemático de límites. Estas propiedades están definidas para límites finitos, aunque, como veremos más adelante, pueden ser aplicadas también a límites infinitos.

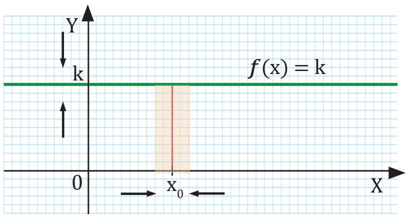


Fig. 7.

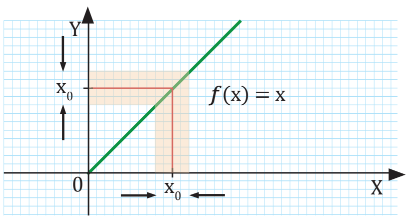


Fig. 8.

3.1 Propiedades

L1. El límite de una función en un punto, si existe, es único.

L2. El límite de la función constante en un punto es la misma constante.

$$\lim_{x \to x_0} k = k$$

L3. El límite de la función identidad en un punto es el valor de ese punto.

$$f(x) = x \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$$

L4. Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existen y son finitos, se verifica:

		Ejemplo
L4.1.	$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to -1} f(x) = 2$ y $\lim g(x) = 5 \Rightarrow \lim (f(x) + g(x)) = 2 + 5 = 7$
L4.2.	$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$, $k \in \mathbb{R}$.	$\lim_{x \to 3} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \to 3} 5 \cdot f(x) = 5 \cdot \lim_{x \to 3} f(x) = 5 \cdot 3 = 15$
L4.3.	$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ y $\lim_{x \to 2} g(x) = 13 \Rightarrow \lim (f(x) \cdot g(x)) =$ $= \lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x) = 4 \cdot 13 = 52$
L4.4.	$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$	$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to -2} f(x) = -4 \\ \lim_{x \to -2} g(x) = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to -2} f(x)}{\lim_{x \to -2} f(x)} = \frac{-4}{-1} = 4$
L4.5.	$\lim_{x \to x_0} [f(x)^{g(x)}] = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$	$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to 1} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 1} g(x) = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = (\lim f(x))^{\lim_{x \to 1} g(x)} = 2^6 = 64$
L4.6.	$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x \to x_0} f(x)]$, si g es continua en $\lim_{x \to x_0} f(x)$	

Tabla 19

Las propiedades L2., L3., y L4. permiten calcular de manera inmediata límites de funciones polinómicas y racionales.

Tipo de función	Ejemplo
Si $f(x) = P(x)$ es una función polinómica, para cualquier x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) = P(x_0)$	$\lim_{x \to 3} (-x^2 + 5x - 2) = -3^2 + 5 \cdot 3 - 2 = -9 + 15 - 2 = 4$
Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, para cualquier x_0 tal que $Q(x_0) \neq 0$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$	$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x + 5}{x + 3} = \frac{3 \cdot 2^2 - 2 + 5}{2 + 3} = \frac{15}{5} = 3$

Tabla 20

3.2 Indeterminaciones

Son resultados de operaciones cuyo resultado no es conocido, como:

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0} \qquad \frac{0}{0}$$

La propiedad L4., que nos indica cómo operar con límites finitos, también verifica si una de las funciones o ambas tienen límite infinito, o bien, si la variable x tiende a más o menos infinito.

Al operar con límites tanto finitos como infinitos, pueden aparecer expresiones inicialmente idénticas y cuyo resultado es diferente según las funciones que se operen. A estas expresiones las llamamos indeterminaciones.

Consideremos las funciones $f_1(x) = x^5 - 4x^3$, $f_2(x) = 2x^2 - 8$ y $f(x) = \dfrac{x^5 - 4x^3}{2x^2 - 8}$; calculemos $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$:

Si aplicamos la propiedad L4.4. de los límites, obtenemos:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^5 - 4x^3}{2x^2 - 8} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^5 - 4x^3)}{\lim\limits_{x \to -2} (2x^2 - 8)} = \frac{0}{0}$$

De igual manera, si calculamos

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 4x^3}{2x^2 - 8} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^5 - 4x^3)}{\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 8)} = \frac{0}{0}$$

La expresión $\dfrac{0}{0}$ no es ningún número, pues no tiene sentido dividir por cero. Pero, si observamos la gráfica de f, deducimos que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$ y que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

En ambos casos hemos obtenido, inicialmente, la misma expresión, $\dfrac{0}{0}$, y, sin embargo, el valor del límite es diferente. Por este motivo, decimos que $\dfrac{0}{0}$ es una «indeterminación».

También son indeterminaciones las siguientes expresiones:

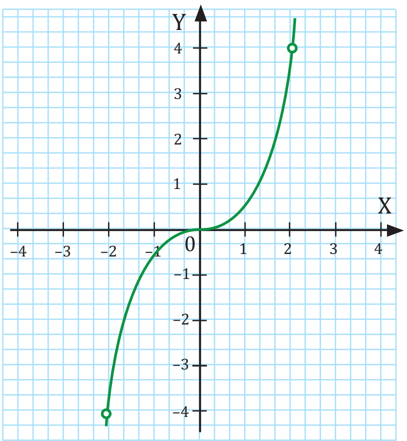
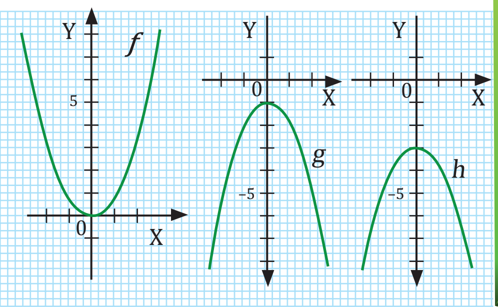


Fig. 9.

Actividades

9. Sean las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 - 1$ y $h(x) = -x^2 - 3$, cuyas gráficas son las de la figura.

- **Deduce**, a partir de las gráficas, los límites siguientes: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$,
- **Calcula**, aplicando la propiedad L4.1, los límites: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x))$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + h(x))$
- **Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x))$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + h(x))$ efectuando previamente la suma y compara el resultado con el del apartado anterior.



4. CÁLCULO DE LÍMITES

A continuación, calcularemos los límites de distintas funciones basándonos en las propiedades descritas en el apartado anterior.

4.1 Límites de funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son de la forma $f(x) = P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x^1 + a_0 \cdot \forall a_i \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$.

- El límite de una función polinómica en un punto x_0 es el valor que toma la función en dicho punto.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = P(x_0)$$

Así $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

- El límite de una función polinómica en el infinito vale $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo del signo del término del coeficiente de mayor grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \begin{cases} +\infty \text{ si } a_n > 0 \\ -\infty \text{ si } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\forall a_i \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 6

Calculemos:

- $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 1)$
- $\lim_{x \to +\infty} (-3x^2 + 5x - 1)$
- $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 8)$

- $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 1) = +\infty$ puesto que 3 > 0.
- $\lim_{x \to +\infty} (-3x^2 + 5x - 1) = -\infty$ puesto que - 3 < 0.
- $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 8) = \lim_{x \to +\infty} ((x)^2 + 2(-x) + 8) = \lim_{x \to +\infty} (x)^2 - 2(x) + 8) = +\infty$ puesto que 1 > 0.

4.2 Límites de funciones racionales

En general, las funciones racionales son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_n x^m + \cdots + b_0}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

En el estudio del límite distinguiremos dos casos:

–El límite de una función racional en un punto x_0 es el valor que toma la función en dicho punto. Consideraremos tres casos:

1. Si $Q(x_0) \neq 0$ entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Ejemplo 7

Calculemos: $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} = \frac{(-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 6(-1)}{1 - (-1)} = -7$$

2. Si $Q(x_0) = 0$ y $P(x_0) = 0$, entonces estamos en un caso de indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Para resolver esta indeterminación, dividimos numerador y denominador por $x - x_0$ situación que equivale a factorizar el polinomio, de manera que se puede simplificar el factor $(x - x_0)$ y calculamos el límite de la expresión simplificada.

Ejemplo 8

Calculemos: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x}$; $x \neq 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 6x)\cdot \cancel{(x-1)}}{(-1)\cdot \cancel{(x-1)}} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 6x}{-1} = \frac{1^2 - 6\cdot 1}{-1} = 5$$

Si $Q(x_0) = 0$ y $P(x) \neq 0$, el límite es más infinito, menos infinito o no existe, dependiendo del signo de los límites laterales.

Ejemplo 9

Calculemos: $\lim_{x\to 1} \dfrac{-1}{x^2 - 2x + 1}$

Calculemos los límites laterales:

- Al tomar valores de x próximos a 1, aunque menores, el numerador es negativo $(-1 < 0)$ y el denominador, positivo $(x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0)$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$$

- Al tomar valores de x próximos a 1, aunque mayores, el numerador es negativo $(-1 < 0)$ y el denominador, positivo $(x\ 2 - 2x + 1 = (x-1)2 > 0)$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$$

- Como ambos límites laterales son iguales a $-\infty$, podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$$

- El límite de una función racional en el infinito nos llevará a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ cuyo resultado dependerá del grado de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Así, podemos distinguir tres casos:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$, $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{0, 1, ..., n\}$, $b_j \in \mathbb{R}\ \forall j \in \{0, 1, ..., m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$.	
Si $n < m$, entonces: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$	Ejemplo: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^4 - 2} = 0$
Si $n = m$, entonces: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_n}$	Ejemplo: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{8x^2 - 1}{4x^2 + 1} = 2$
Si $n > m$, entonces: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \dfrac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{si } \dfrac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$	Ejemplo: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 + 5x - 3}{7x^2 + 1} = +\infty$ ya que $\dfrac{2}{7} > 0$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 + 5x - 3}{-7x^2 + 1} = -\infty$ ya que $\dfrac{2}{-7} < 0$

Tabla 21

4.3 Límites de funciones definidas a trozos

Calcular el límite de funciones definidas a trozos puede reducirse a tres casos.

- **Primer caso:** Si a las imágenes de todos los valores de x próximos a x_0 las calculamos mediante la misma expresión analítica, procedemos como en el caso de las funciones definidas mediante una única expresión analítica.

Ejemplo 10

Calculemos: $\lim_{x \to 1} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 6x) \cdot \cancel{(x-1)}}{-1 \cdot \cancel{(x-1)}} = \frac{1^2 - 6 \cdot 1}{-1} = 5$$

Nota que en este caso, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

- **Segundo caso:** Si a las imágenes de los valores de x próximos a x_0 por la izquierda las calculamos mediante una expresión analítica, y las de los valores de x próximos a x_0 por la derecha mediante otra diferente, calcularemos los dos límites laterales por separado. La existencia del límite depende de si estos dos coinciden.

Ejemplo 11

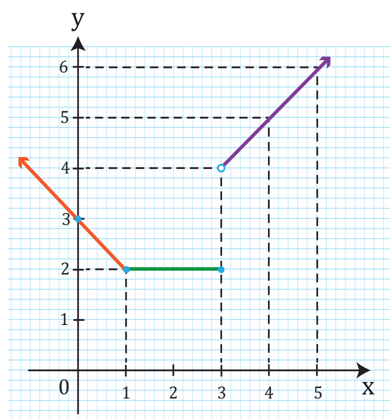
Calculemos: $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $\lim_{x \to 3} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- Al calcular la imagen de los valores de x próximos a 1 por la izquierda y por la derecha, utilizamos expresiones analíticas diferentes. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3 - x) = 3 - 1 = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2 \end{array}\right\} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

- Al calcular la imagen de los valores de x próximos a 3 por la izquierda y por la derecha, utilizamos expresiones analíticas diferentes. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x + 1) = 4 \end{array}\right\} \lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \to 3} f(x)$$



- **Tercer caso:** Para el límite de una función a trozos en el infinito, consideramos solo el trozo de la función cuyo dominio llegue hasta el infinito y calculamos como una función cualquiera.

Actividades

10. Sea la función. $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 3x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to -3} f(x)$ b. $\lim_{x \to -2} f(x)$ c. $\lim_{x \to 1} f(x)$ d. $\lim_{x \to 2} f(x)$

5. LEVANTAR INDETERMINACIONES PARA CALCULAR LÍMITES

Ya vimos cómo resolver la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, que se originaban al calcular límites de funciones racionales. A continuación veremos, mediante ejemplos, cómo resolver otros casos sencillos de indeterminaciones, salvo las del tipo 0^0 e ∞^0, pues, para ello, necesitamos técnicas de un nivel superior al dado en esta unidad.

TIC

Visita:

www.disfrutalasmatematicas.com/cálculo/limites.html

Ejemplo 12

Calculemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}\right)-\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$$

Puesto que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4}{x^2-1}=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$, resulta la indeterminación $(+\infty)-(+\infty)$. En este caso, la indeterminación se resuelve efectuando las operaciones indicadas, pues se obtiene el límite de una función racional que ya sabemos calcular.

Efectuando la diferencia, se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}-\frac{x^2+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+4)\cdot x-(x^2+1)\cdot(x^2-1)}{(x^2-1)\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{(x^3-x)}=0$$

Ejemplo 13

Calculemos:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+1}{x^2-3}\cdot\frac{x^2-4}{4x}\right).$$

Puesto que, $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+1}{x^2-3}=0$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{4x}=-\infty$, resulta la indeterminación $0\cdot(-\infty)$. Para resolverla, operamos convenientemente hasta transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, la cual procederá de una función racional que ya sabemos resolver.

Efectuando la operación diferencia, se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+1}{x^2-3}\cdot\frac{x^2-4}{4x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(5x+1)\cdot(x^2-4)}{(x^2-3)\cdot 4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+x^2-20x-4}{4x^3-12x}=\frac{5}{4}$$

Nota que en este caso, $\lim_{x\to\infty}f(x)\neq f(\infty)$

Ejemplo 14

Calculemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}:\frac{x-1}{x^2+5}\right).$$

Puesto que $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ y $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+5}=0$, resulta la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Para resolverla, operamos convenientemente hasta transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, la cual procederá de una función racional que ya sabemos resolver.

Efectuando el cociente, se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}:\frac{x-1}{x^2+5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot(x^2+5)}{x\cdot(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+10}{x^2-x}=2$$

Ejemplo 15

Calculemos: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$

Puesto que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{x-1}=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+3}=+\infty$

resulta la indeterminación $1^{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve teniendo en cuenta que:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\pm\infty$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{F(x)}\right)^{F(x)}=e$

Así pues, transformaremos la función inicial $f(x)^{g(x)}$ hasta obtener otra de la forma:

$$\left[\left(1+\frac{1}{F(x)}\right)^{F(x)}\right]^{G(x)}$$

con lo cual, el valor del límite será $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)}$

Procedemos como sigue:

Transformamos, en primer lugar, la base de la función $\dfrac{x+5}{x-1}$ en la forma $\dfrac{1}{F(x)}$. Para ello, sumamos y restamos 1 a dicha base:

$$1+\frac{x+5}{x-1}-1=1+\frac{x+5-x+1}{x-1}=1+\frac{6}{x-1}$$

$$=1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}$$

Si la función obtenida $F(x)=\dfrac{x-1}{6}$ se sitúa en el exponente de la primera potencia, ya tendremos que el límite de la base es el número e.

Ahora bien, para que el exponente de la función inicial no resulte alterado, deberemos multiplicar también por la inversa de la función $F(x)$.

Por tanto, podemos escribir:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x-1}{6}}\right]^{\frac{6}{x-1}\cdot\frac{x^2}{x+3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6}{x-1}\cdot\frac{x^2}{x+3}\right)}$$

Por otra parte:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6}{x-1}\cdot\frac{x^2}{x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^2+2x-3}=6$$

Por tanto, el valor del límite es:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=e^6$$

Y TAMBIÉN: ¿?



http://goo.gl/rsHxpG

JOHN WALLIS

Matemático inglés (1616-1703). En 1655 publicó Aritmeticae infinitorum, considerada una de las obras más importantes del análisis.

En este libro aparece por primera vez una formalización de la idea de límite y se introduce también la notación:

$$\frac{1}{0}=\infty \text{ y } \frac{1}{\infty}=0$$

En la notación anterior está implícita que son tendencias y no igualdades absolutas

El procedimiento descrito en el ejemplo 11 también es válido si la indeterminación se presenta cuando la variable x tiende a $-\infty$ o a un número real x_0.

Actividades

11. **Calcula** el valor de los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+3x}{2x^2-x}$

c. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+15x-4}{x-1}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+5}{x^2}:\dfrac{-2x+6}{2x^3+1}$

12. **Calcula** los siguientes límites mediante las técnicas de cálculo sistemático:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^2+3x-5}{4x^2+x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3}{8x+5}$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x+2}{2x^2-7x+4}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+2x-1}{2x+3}$

13. **Calcula** los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^5+4}{x^2-3}-\dfrac{x^3+1}{x^2}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+x}{x-2}:\dfrac{2x^2}{x+2}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{4x^2}{x^2-9}\right)$

6. APLICACIÓN DE LOS LÍMITES

Observa la representación gráfica de las siguientes funciones:

En todas ellas verificamos que, al desplazar el punto P sobre la gráfica en la dirección indicada por la flecha, la distancia entre este punto y la recta coloreada de morado tiende a cero. Diremos entonces que esta recta es una asíntota de la función.

6.1 Asíntotas verticales

Observa de nuevo la gráfica de las dos primeras funciones. Como ves, cuando x tiende a 2, $f(x)$ tiende a más o menos infinito para al menos uno de los límites laterales. Decimos que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la función. En general:

La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de una función f si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

6.2 Asíntotas horizontales

Observa ahora la gráfica de las dos últimas funciones. Cuando x tiende a más o menos infinito, $g(x)$ tiende a -1.

Puede suceder que los puntos de una gráfica se acerquen a una recta horizontal solo cuando x tiende a menos infinito o a más infinito. En el primer caso diremos que la recta es una asíntota horizontal por la izquierda de la función; en el segundo, diremos que es una asíntota horizontal por la derecha.

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de una función f si se cumple alguna de las condiciones siguientes;

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

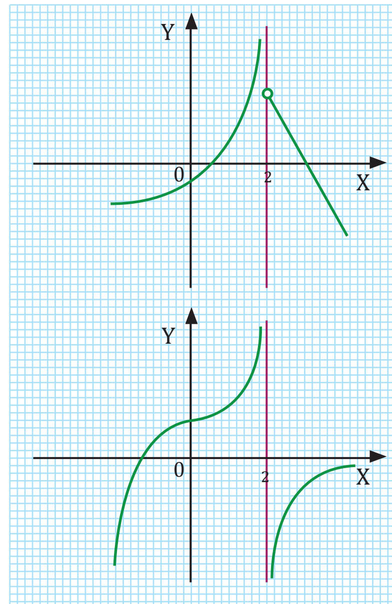


Fig. 10.

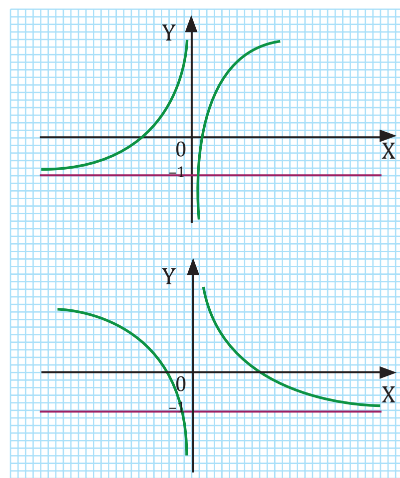
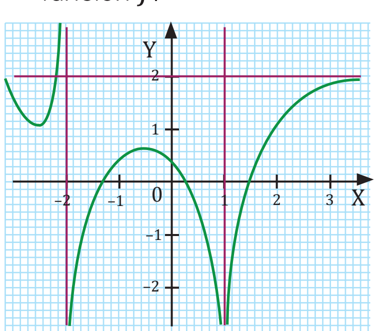


Fig. 11.

Actividades

14. En la figura representamos la función f.



Calcula.

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

b. $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

c. $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

d. $\lim_{x \to -2} f(x)$

e. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

f. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

g. $\lim_{x \to 1} f(x)$

h. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

7. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

7.1 Continuidad de una función en un punto

Considera las funciones representadas en la figura. Aunque las gráficas de estas funciones son bastante parecidas, en el punto $x_0 = 2$ presentan un comportamiento muy distinto.

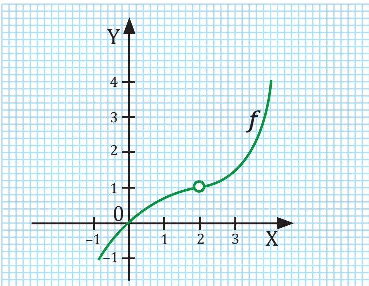


Fig. 12.

- La gráfica de f puede dibujarse, en un vecindario de $x_0 = 2$, sin levantar el lápiz del papel. Diremos que es una función continua en $x_0 = 2$.

Sin embargo, las gráficas de g, h e i no pueden dibujarse, en un vecindario de $x_0 = 2$ sin levantar el lápiz del papel, ya que presentan una interrupción en este punto. Diremos que son funciones discontinuas en $x_0 = 2$.

Veamos en cada caso cuál es el motivo de la interrupción:

- La gráfica de g se interrumpe en $x_0 = 2$ porque no existe $g(2)$.

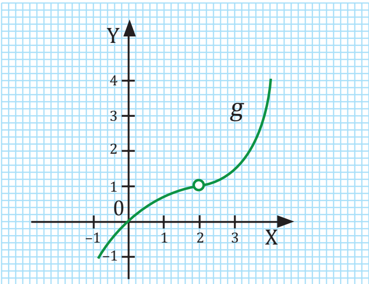


Fig. 13.

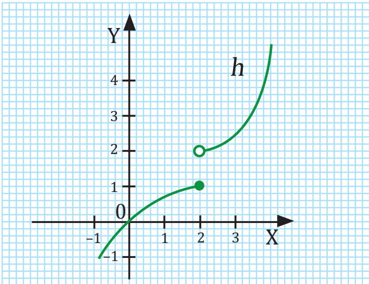


Fig. 14.

- La gráfica de h se interrumpe en $x_0 = 2$ porque los límites laterales por la izquierda y por la derecha en $x_0 = 2$ no coinciden, es decir, porque no existe $\lim_{x \to 2} h(x)$.

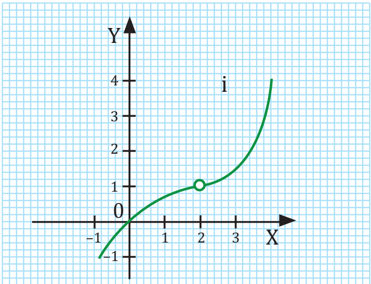


Fig. 15.

- La gráfica de i se interrumpe en $x_0 = 2$ porque, aunque exista $\lim_{x \to 2} i\,(x)$, su valor no coincide con $i\,(2)$.

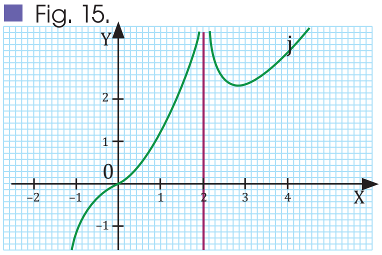


Fig. 16.

- También la función j, representada a la izquierda, es *discontinua* en el punto $x_0 = 2$. En este caso, el motivo de la interrupción es que el límite de j en $x_0 = 2$ no es finito.

Esta idea intuitiva de continuidad se traduce matemáticamente del siguiente modo:

Una función f es continua en un punto x_0 si se verifican las tres condiciones siguientes.

- Existe $f(x_0)$
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y es *finito*
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Si no se cumple alguna de estas condiciones, diremos que la función es discontinua en x_0.

Ejemplo 16

Comprobemos que la función $f(x)$ es continua en $x_0 = 1$.

Comprobamos si se verifican las tres condiciones de continuidad:

$$f(x) \begin{cases} 2x + 3 \text{ si } x < 1 \\ x^2 + 4 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

C1: $f(1) = 1^2 + 4 = 5$

C2: $\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + 3) = 5 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 4) = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 5$

C3: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 5$

Luego f es continua en $x_0 = 1$.

Como vimos en el ejemplo, para saber si una función es continua en un punto, debemos analizar las tres condiciones de la definición.

Sin embargo, en la práctica no es necesario comprobar las tres condiciones, ya que estas se resumen en la tercera condición. En efecto, para que se cumpla:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Es preciso que exista $f(x_0)$, que exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y sea finito, y que ambos coincidan.

7.2 Continuidad lateral

Si consideramos los límites laterales de una función en el punto x_0, podemos definir el concepto de continuidad lateral.

- Una función f es continua por la izquierda en un punto x_0 si y solo si se verifica $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Una función f es continua por la derecha en un punto x_0 si y solo si se verifica $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Análogamente a lo que ocurre con los límites, una función f es continua en un punto x_0 si y solo si lo es por la izquierda y por la derecha.

Actividades

15. **Comprueba** si las siguientes funciones son continuas.

a. $f(x) = \dfrac{x - 4}{x + 5}$ en $x_0 = -5$

b. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

c. $h(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < -1 \\ x - 1 \text{ si } -1 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 2x + 5 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$

en $x_0 = -1$ y $x_0 = 3$

7.3 Continuidad de una función en un intervalo

En general, una función es continua en todos los puntos de algún intervalo, lo que nos lleva al estudio de la continuidad en un sentido más amplio.

Una función f es continua en un intervalo abierto si y solo si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a ,b]$ si y solo si:

- f es continua en el intervalo abierto (a, b).
- f es continua por la derecha en $x = a$.
- f es continua por la izquierda en $x = b$.

Una función f es continua en un intervalo abierto si y solo si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.

Una función f es continua en un intervalo semiabierto $[a,b[$, donde b puede ser un número real o $+\infty$, si:

- f es continua en el intervalo abierto $]a, b[$.
- f es continua por la derecha en $x = a$.

Esta última definición también aplica para un intervalo semiabierto $(a,b]$, pero ahora f debe ser continua por la izquierda en $x = b$.

Con estas definiciones, la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ es continua en el intervalo abierto $]0,+\infty[$, pues en cualquier punto x_0 de este intervalo se tiene $\lim f(x) = f(x_0)$.

Pero no es continua, por ejemplo, en los intervalos $[0,1]$ o $[0,+\infty[$, ya que no es continua por la derecha en $x_0 = 0$ al no estar definida en $x_0 = 0$.

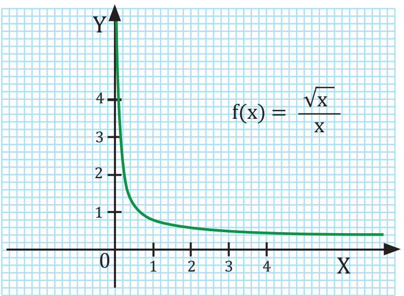


Fig. 17

Actividades

16. **Estudia** la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.

a. $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x < 0 \\ x - 2 \text{ si } 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 11 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$

en $[0, 3]$

b. $g(x) = \sqrt{x - 1}$

en $[1, +\infty]$

c. $h(x) = x \cdot |x|$

en $[-2, 2]$

8. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Como consecuencia de las propiedades de los límites, se verifican las siguientes propiedades de las funciones continuas:

1. La función constante $f(x) = k$ es continua en todo su dominio, $D(f) = R$, por cuanto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k = f(x_0)$$

2. La función identidad, $f(x) = x$, es continua en todo su dominio, $D(f) = R$, por cuanto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0)$$

3. Si f y g son dos funciones continuas en un punto x_0:
   3.1. La función suma, $f + g$, es continua en el punto x_0.
   3.2. La función producto por una constante, $k \cdot f$, es continua en el punto x_0.
   3.3. La función producto, $f \cdot g$, es continua en el punto x_0.
   3.4. La función cociente, $\frac{f}{g}$, es continua en el punto x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$.
   3.5. La función compuesta, $g \circ f$, es continua en el punto x_0, siempre que g sea continua en $f(x_0)$.
   3.6. La función $[f^g](x) = [f(x)]^{g(x)}$ es continua en el punto x_0.

8.1 Continuidad de las funciones elementales

A partir de estas propiedades, obtenemos de manera inmediata la continuidad en su dominio de las siguientes funciones:

- Funciones potenciales: $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

  Las funciones potenciales son el producto de n funciones identidad. Así, por las propiedades 2 y 3.3, son continuas en todo su dominio.

- Funciones polinómicas: $f(x) = P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\quad a_n \in \mathbb{R},\quad n \in \mathbb{N}.$

  Las funciones polinómicas son combinaciones lineales de funciones potenciales. Así, por las propiedades 3.1 y 3.2, son continuas en todo su dominio.

- Funciones racionales: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)},\ Q(x) \neq 0$

  Las funciones racionales vienen dadas por un cociente de dos funciones polinómicas. Así, por la propiedad 3.4, son continuas en todo su dominio, mientras $Q(x) \neq 0$.

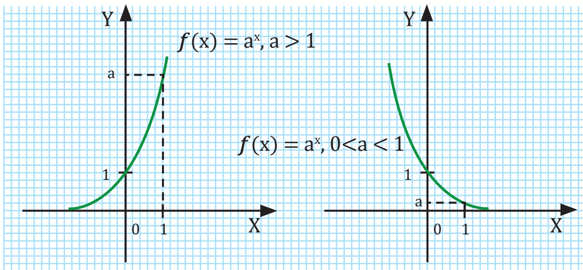
- Funciones raíz: $f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N}$, y $x \geq 0$ si n es par.

  - Si n es par: Estas funciones son continuas en el intervalo $]0,+\infty[$ por la propiedad 3.6 y son continuas por la derecha en $x_0 = 0$. Así, son continuas en todo su dominio.

    Si n es impar: Estas funciones son continuas en el intervalo $]0,+\infty[$ por la propiedad 3.6, son continuas en el intervalo $]-\infty, 0[$ por las propiedades 3.2 y 3.6 y son continuas en $x_0=0$. Así, son continuas en todo su dominio.

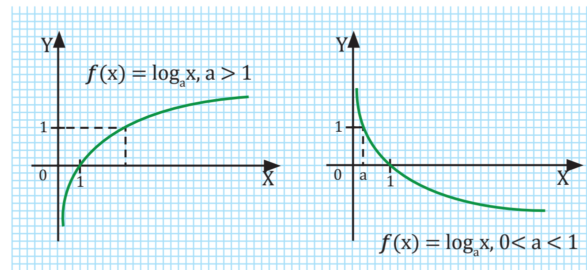
También son continuas en todo su dominio las siguientes funciones elementales:

Funciones exponenciales: $f(x) = a^x$ con $a > 0, a \neq 1$



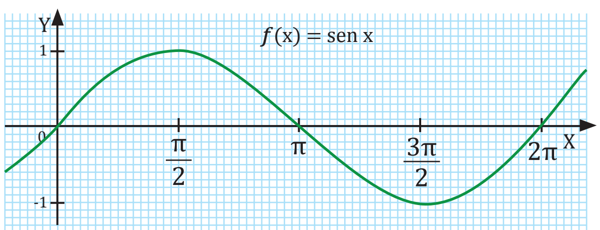
Las funciones exponenciales son continuas en.

Funciones logarítmicas: $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

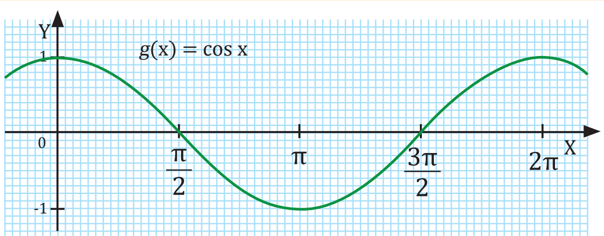


Las funciones logarítmicas son continuas en $(0, +\infty)$.

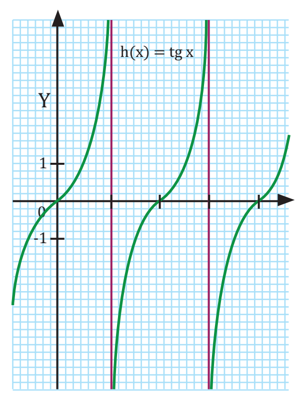
Funciones trigonométricas: $f(x) = \text{sen } x, g(x) = \cos x, h(x) = \text{tg } x$



La función $f(x) = \text{sen } x$ es continua en $\mathbb{R}$.



La función $g(x) = \cos x$ es continua en $\mathbb{R}$.



La función $h(x) = \text{tg } x$ es continua en $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ siendo $k \in Z$, en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito

Tabla 22.

Ejemplo 17

Estudiemos la continuidad de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$ b. $g(x) = x^2 + \text{In} x$ c. $h(x) = \sqrt{x - 2}$

a. La función f es una función racional, por tanto, es continua en todos los puntos que no anulen su denominador, es decir, en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

b. La función g es una función suma de dos funciones continuas, x^2 en $\mathbb{R}$ y $\ln x$ en $]0, +\infty[$, luego g es continua en el intervalo $]0, +\infty[$.

c. La función h es una función compuesta de dos funciones, f y g ($h = g \circ f$), donde la función $f(x) = x - 2$ es continua en $\mathbb{R}$ y la función g = $\sqrt{x}$ es continua en el intervalo $]2, +\infty[$.

La función compuesta h será continua en todos aquellos puntos x_0 tales que g sea continua en $f(x_0)$, es decir, cuando $x - 2 \geq 0$. Por tanto, la función h es continua en el intervalo $[2, +\infty)$.

9. TEOREMAS RELATIVOS A LA CONTINUIDAD

Las funciones continuas en un punto o continuas en un intervalo cerrado poseen una serie de propiedades que estudiaremos en los siguientes teoremas.

9.1 Teorema de conservación de signo

Si una función f es continua en un punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno de x_0, $|x - x_0| < \delta$, en el que la función f tiene el mismo signo que $f(x_0)$.

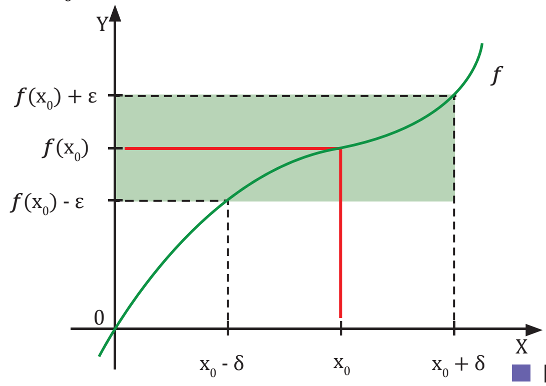


Fig. 18

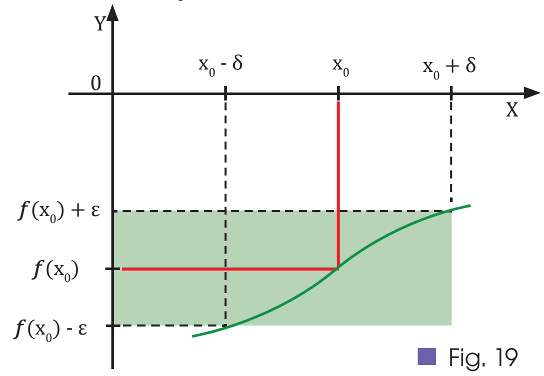


Fig. 19

Como puedes ver en la figura, si $f(x_0) > 0$, podemos tomar un intervalo pequeño $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tal que la imagen $f(x_0 - \delta) > 0$. Por ser continua en x_0, las imágenes de este intervalo son positivas.

Se razona de igual manera si $f(x_0) < 0$.

9.2 Teorema de Bolzano

Si una función f es continúa en un intervalo cerrado $[a,b]$ y en los extremos de esta toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

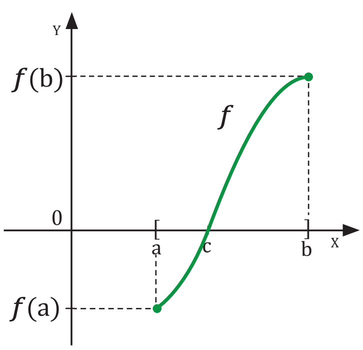


Fig. 20

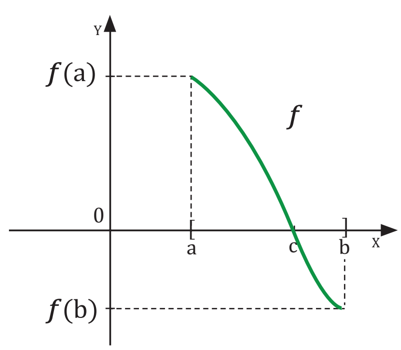


Fig. 21

Intuitivamente, este resultado es bastante evidente, pues para ir de un punto situado por debajo del eje x a otro situado por encima, o viceversa, sin levantar el lápiz del papel, deberemos cortar el eje x al menos en un punto.

Ejemplo 18

Comprueba, utilizando el teorema de Bolzano, que la gráfica de la función $f(x) = \cos x - 2x + 1$ corta al eje de abscisas al menos en un punto.

La función es continua en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Los valores de la función en los extremos de éste son:

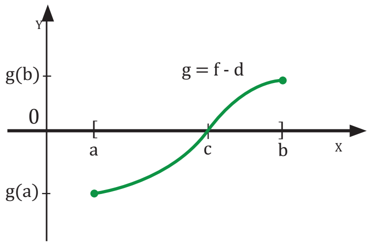
$f(0) = 2 > 0$ $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \pi < 0$

Así pues, por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f(c) = 0$, es decir, la función corta al eje de abscisas al menos en dicho punto.

Y TAMBIÉN: ¿?

Demostración del teorema de los valores intermedios

Supongamos que $f\,(a) < f\,(b)$. Sea d un valor del intervalo $(f(a),\ f(b))$ y sea la función $g(x) = f(x) - d$.



La función g es continua en $[a, b]$, por la propiedad PC3.1, y además:

$$g\,(a) = f\,(a) - d < 0$$
$$g\,(b) = f\,(b) - d > 0$$

Luego por el teorema de Bolzano, existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $g\,(c) = 0$. Es decir, $f\,(c) - d = 0$, luego $f(c) = d$.

Análogamente se razona si $f(a) > f(b)$.

9.3 Teorema de valor intermedio

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la función toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Es decir, para cualquier valor d comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un valor $c \in\ ]a,b[$ tal que $f(c) = d$.

Ejemplo 19

Apliquemos el teorema de los valores intermedios para probar que la función $f(x) = 4\ \text{sen}\ x + 1$ toma el valor 3 en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

- Calculamos un valor de $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f(c) = 3$.

La función f es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ por ser suma de dos funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Además, se cumple que $f(0) = 1$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$. Puesto que se verifica $1 < 3 < 5$, por el teorema de los valores intermedios, existe al menos un valor $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f\,(c) = 3$.

- Para calcular un valor de c resolvemos la ecuación:

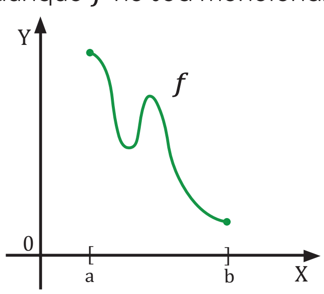
$$3 = 4\ \text{sen}\ c + 1 \Rightarrow \text{sen}\ c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

- Una función f tiene un **mínimo absoluto** en x_0 si para todo x del dominio de f se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.

  Una función f tiene un **máximo absoluto** en x_0 si para todo x del dominio de f se verifica que $f(x) \leq f(x.)$

Y TAMBIÉN: ¿?

El máximo y el mínimo absolutos pueden alcanzarse en los extremos del intervalo aunque f no sea monótona.



9.4 Teorema de Weierstrass

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la función alcanza en el intervalo $[a,b]$ su máximo absoluto y su mínimo absoluto.

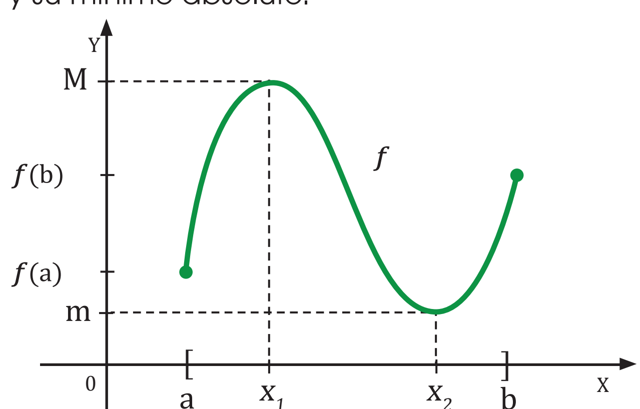
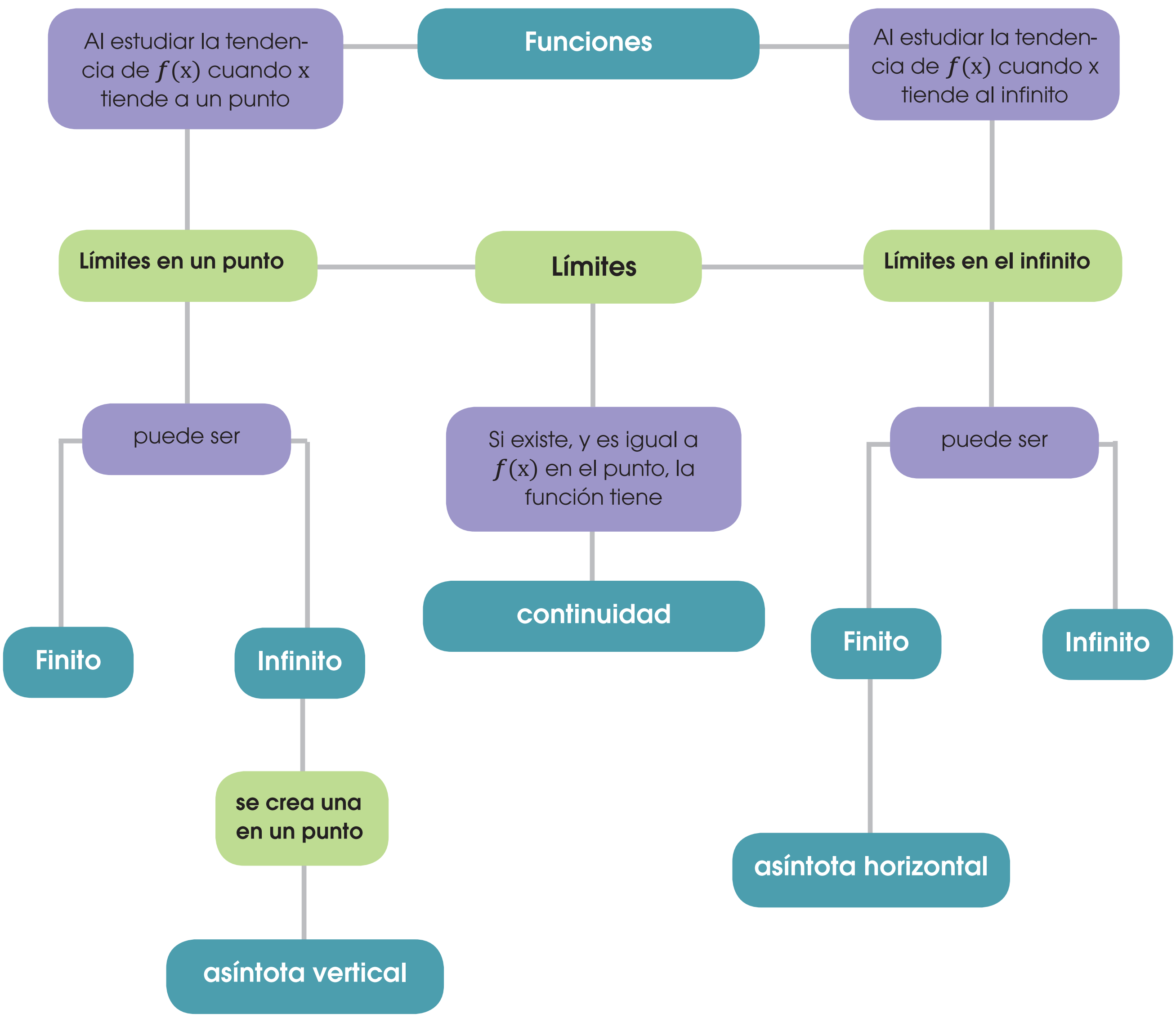


Fig. 22

Evidentemente, si una función f es continua en $[a,b]$, los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ pueden unirse mediante una curva continua, como se observa en la figura. Así, tendremos dos puntos x_1 y x_2 del intervalo $[a,b]$ en donde la función toma, respectivamente, el mayor y el menor valor posible dentro de dicho intervalo.

Por tanto, la función alcanza su máximo absoluto, M, y su mínimo absoluto, m, en $[a,b]$.

1 Resumen


Funciones
Al estudiar la tendencia de $f(x)$ cuando x tiende a un punto
Al estudiar la tendencia de $f(x)$ cuando x tiende al infinito
Límites en un punto
Límites
Límites en el infinito
puede ser
Si existe, y es igual a $f(x)$ en el punto, la función tiene
puede ser
Finito
Infinito
continuidad
Finito
Infinito
se crea una en un punto
asíntota horizontal
asíntota vertical

Problemas resueltos

A

1. **Aplica** el teorema de Bolzano para probar que las gráficas de $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e - x$ se cortan en algún punto y **determínalo** en un intervalo de amplitud menor o igual que la unidad.

Solución

Probar que las gráficas de $f(x) = \ln x$ y de $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto equivale a probar que la ecuación $\ln x = e^{-x}$ tiene al menos una solución.

Para ello, consideramos la función $h(x) = \ln x - e^{-x}$.
Esta función es continua en $]0, +\infty[$, por ser diferencia de dos funciones continuas: la primera, ln x, en $]0, +\infty[$º y la segunda, e^{-x}, en $\mathbb{R}$.
Observa, además, que:

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln x - e^{-x}) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to +\infty} (\ln x - e^{-x}) = +\infty$$

Luego, para valores suficientemente cercanos a 0 se tiene la siguiente desigualdad:

$$\ln x - e^{-x} < 0$$

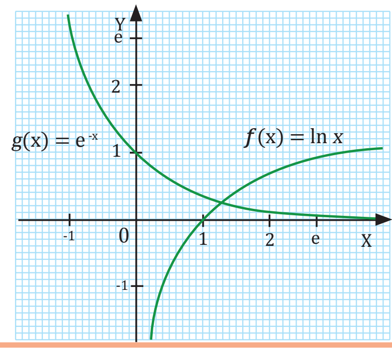
Y para valores suficientemente grandes:

$$\ln x - e > 0$$

Por tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto c tal que $h(c) = \ln c - e^{-c} = 0$. Es decir, la ecuación $\ln x = e^{-x}$ tiene al menos una solución.
Para determinar dicho punto en el intervalo pedido, hallaremos el valor de la función h en 1, 2, 3...:

$$h(1) = \ln 1 - e^{-1} = -e^{-1} < 0$$
$$h(2) = \ln 2 - e^{-2} = 0{,}56 > 0$$

Por tanto, el punto de corte de las dos gráficas se encuentra en el intervalo (1, 2).



B

2. **Halla** el valor que deben tener a y b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución

$$f(x) \begin{cases} 5x & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + b & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Es continua en $(-\infty, -1]\cup(-1, 2]\cup(2, +\infty)$ por ser una función polinómica en cada uno de estos intervalos Por tanto, tendremos que calcular a y b para que la función f sea continua en $x = -1$ y en $x = 2$.

- $x = -1$:

f es continua en $x = -1$ si $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

- Calculamos $f(-1)$: $f(-1) = -5$
- Calculamos $\lim_{x\to -1} f(x)$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 5x = -5$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (ax^2 + b) = a + b$$

Para que exista $\lim f(x)$, debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow -5 = a + b$$

- $x = 2$:

f es continua en $x = 2$ si $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

- Calculamos $f(2)$: $f(2) = 4a + b$
- Calculamos $\lim_{x\to 2} f(x)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2 + b) = 4a + b$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x - 2) = 4$$

Para que exista $\lim_{x\to 2} f(x)$, debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a + b = 4$$

Así, para hallar a y b, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b = -5$$
$$4a + b = 4$$

Resolviendo se obtiene $a = 3$ y $b = -8$.

Ejercicios y problemas

1 Funciones y límites

1. Un elemento radiactivo se desintegra en función del tiempo según la expresión

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

donde $N(t)$ es el número de átomos en el instante t, N_0 es el número de átomos existentes en el tiempo inicial $t = 0$, y λ es la constante de desintegración que depende del elemento.

Halla el período de vida media del estroncio, definido como el tiempo que transcurre para que el número inicial de átomos se reduzca a la mitad. Para el estroncio: $\lambda = 7.8219 \cdot 10^{-10}$.

2. **Calcula** los límites de las funciones polinómicas a continuación.

a. $\lim_{x \to 0} (-x^2 + 6x - 8)$

b. $\lim_{x \to -1} (x^7 + 6x^2 - 8x)$

c. $\lim_{x \to -\infty} (4x^3 - 3x^2 + 2x)$

d. $\lim_{x \to -\infty} (4x^4 + 3x^3 + 2x^2)$

e. $\lim_{x \to -2} (x^3 + 6x)$

f. $\lim_{x \to 3} (2x^3 - 6x^2)$

g. $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 5)$

h. $\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 3x^3 + 2x^2)$

3. **Determina** el valor de los siguientes límites de funciones racionales.

a. $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + 10x^2 + x}{x^2 + 5x - 18}$

b. $\lim_{x \to 9} \frac{x^3 - 10x + 4}{2x^2 - 7x - 14}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{x + 12}{x + 6}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$

e. $\lim_{x \to 1} \frac{x^9 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 4}$

f. $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + 2x^2 - 12}{x^9 - 4x^2 + 6x}$

g. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x - 6}$

h. $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{2x - 10}$

i. $\lim_{x \to 2} \frac{1 - x}{(2 - x)^2}$

j. $\lim_{x \to -3} \frac{-7}{x^2 + 6x + 9}$

k. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5}{x + 1}$

l. $\lim_{x \to 5} \frac{-3x}{x^2 - 4x - 5}$

m. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

n. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x^2}$

ll. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4}{x - 2}$

o. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 12x + 12}$

4. **Calcula** los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to 2} (3 + 2x - \sqrt{5x - 1})$

b. $\lim_{x \to 3} \left(\frac{3x + 1}{2x - 1} \right)^{x-6}$

c. $\lim_{x \to -1} (5x^7 + \sqrt[3]{x^2 + 4})$

d. $\lim_{x \to 1} (e^{x+1})$

e. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{4} \right)^{3x^2 + 5x - 1}$

f. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{9 - x^2}{-7} \right)^{2x^3}$

g. $\lim_{x \to -\infty} (5x^3 + 1000)^5$

h. $\lim_{x \to +\infty} 2^{-6x + 3}$

5. **Calcula** los siguientes límites.

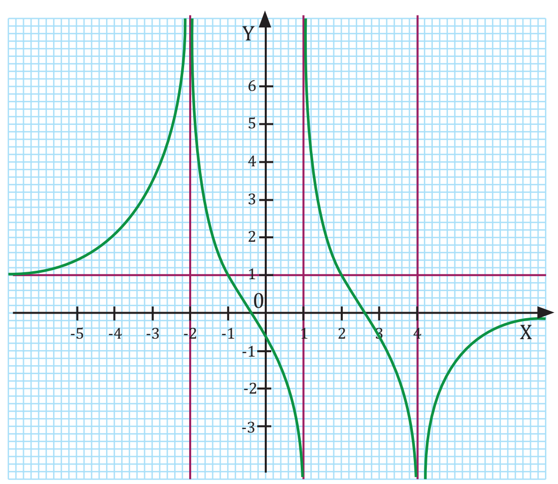
a. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{6x}{3x^2 - 4x} \cdot \frac{-3x^2 + 5}{x + 2} \right)$

b. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x + 1}{x^2 - 2} \cdot \frac{x^2 - 5}{-8} \right)$

c. $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x - 3} \cdot \frac{7x - 3}{x^2 - 9} \right)$

d. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2}{x + 1} \cdot \frac{6x^2 + 4}{2x} \right)$

6. **Halla** las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función representada en la figura siguiente:



7. **Calcula** el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 + 3x - 5}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3} - x^2}$$

8. **Calcula** el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2 + x} - \sqrt{3x^2 - 5x}\right)$$

9. **Halla** el valor de a para que el siguiente límite corresponda a un caso de indeterminación.

$$\lim_{x\to-1} \frac{ax^2 + 2x - 6}{x^2 - 1}$$

—**Determina** el límite para este valor de a.

10. **Halla** el valor de a para que se cumpla:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x - 2}{3x - 1}\right)^{\frac{ax-4}{5}} = e^2$$

11. **Considera** la función $f(x) = \begin{cases} \frac{9 - mx^2}{3 - 2x} & \text{si } x \neq \frac{3}{2} \\ 1 & \text{si } x = \frac{3}{2} \end{cases}$

–**Averigua** el valor de m para que la función tenga límite finito en el punto $x = \frac{3}{2}$, y **calcula** su valor.

12. **Considera** la función $f(x) = \frac{ax + 8}{bx + 6}$. Luego, **halla** los respectivos valores de a y b para que las rectas $x = 2$ e $y = -4$ sean, respectivamente, la asíntota vertical y horizontal de la función f.

13. **Halla** el valor que deben tener a y b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax - b & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

14. **Halla** el valor que deben tener m y n para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 4mx - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \\ \frac{3x + n}{x + 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

15. **Aplica** el teorema de Bolzano para probar que las gráficas $f(x) = \text{sen } 2x$ y $g(x) = 2x - 1$ se cortan en algún punto del intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

16. **Estudia** si la ecuación $3 \ln x = x$ tiene alguna solución real en el intervalo $(1, 3)$.

17. La función $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ toma el valor -1 para $x = 0$ y el valor $\frac{1}{2}$ para $x = 3$. ¿Podemos deducir de este hecho que existe un valor de x en el intervalo $(0, 3)$ para el cual la función se anula? **Justifica** tu respuesta.

18. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, **calcula** el valor que debe tener $f(-1)$ para que f sea continua en el punto de abscisa $x = -1$.

19. **Demuestra** que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real. ¿Se puede afirmar lo mismo si el polinomio tiene grado par?

20. **Comprueba** si puede aplicarse el teorema de Weierstrass a las siguientes funciones en el intervalo indicado.

—En caso afirmativo, halla el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo correspondiente.

a. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ en $[-1, 2]$

b. $g(x) = \frac{5}{x - 2}$ en $[0, 3]$

c. $h(x) = x^3 - 1$ en $(-2, 2)$

d. $i(x) - x^2 + 2x + 3$ en $[-3, 4]$

21. Una empresa fabrica un determinado artículo que vende a \$ 10,2 por unidad. Si un pedido supera las 100 unidades, la empresa hace una rebaja. El precio de x unidades viene dado por la función:

$$f(x)=\begin{cases} 10{,}2\,x & \text{si } x \leq 100 \\ k\,x\,e^{-0{,}001x} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

a. **Halla** el valor de k para que el precio de las x unidades aumente de forma continua.

b. En la situación del apartado *a.*, ¿cuánto cuesta cada unidad si se compran 400 unidades?

22. **Estudia** la continuidad lateral de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en el punto $x_0 = 0$.

23. **Estudia** la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x-1 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ -x^2+2x+5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

en los puntos $x_0 = -1$ y $x_0 = 3$.

24. **Calcula** los siguientes límites a partir de las reglas de las operaciones dadas en las tablas 17, 18 y 19.

a. $\lim\limits_{x\to 4} \left(\sqrt{2x+1}+x-5\right)$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2+3x+5\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 2} \left((3x-4)\sqrt{x^2+1}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 11} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{x+1}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left((x+4)\cdot(-x^2-5x+2)\right)$

f. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(5x^2+x\right)^{-3}$

g. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{5x^3+6x}\right)^{-1}$

h. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3+x-6}{-4}\right)^{x}$

Tablas de apoyo

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x) \lim g(x)$	$\lim \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$
L_1	L_2	$L_1 \cdot L_2$	$\dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$
			$\infty(*)$ si $L_2=0$ y $L_1\neq 0$
			$\dfrac{0}{0}$ si $L_2 = 0$ y $L_1 = 0$
L	$\pm\infty$	$\pm\infty$ si $L > 0$	0
		$\mp\infty$ si $L < 0$	
		$0 \cdot \infty$ si $L = 0$	
$\pm\infty$	L	$\pm\infty$ si $L > 0$	$\pm\infty$ si $L>0$
		$\pm\infty$ si $L < 0$	$\mp\infty < 0$
		$0 \cdot \infty$ si $L = 0$	$\infty(*)$ si $L=0$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$
$+\infty$ $-\infty$	$-\infty$ $+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

Tabla 23.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim [f(x)]^{g(x)}$
$L1>0$	$L2$	$(L1)^{L2}$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	0
$0\leq L < 1$	$+\infty$	0
	$-\infty$	$+\infty$
0	$L>0$	0
	$L<0$	$\pm\infty$
	$L=0$	0^0
1	$\pm\infty$	1^∞
$+\infty$	$L>0$	$+\infty$
	$L<0$	0
	$L=0$	∞^0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	0

Tabla 24.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x) + g(x)$	$\lim f(x) - g(x)$
$L1$	$L2$	$L1 + L2$	$L1 - L2$
L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\infty - \infty$

Tabla 25.

Para finalizar

1. Para describir los efectos de un terremoto se utiliza la escala de Richter. Según esta escala, la magnitud M de un terremoto viene dada por la expresión:

$$M = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Donde E es la energía del terremoto y E_0 es una constante igual a $2.5 \cdot 10^4$ J.

Calcula la energía liberada en el terremoto de San Francisco del año 1906 si su magnitud fue de 8.25 en la escala de Richter.

2. **Calcula** los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 10x + 4}{2x^2 - 7x - 14}$

b. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 2}{3x - 6}$

c. $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x + 6} - 4}$

d. $\lim_{x \to 2} \frac{1 - x}{(2 - x)^2}$

e. $\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^2 - 5x + 3}{2x^2 - 9}$

3. **Grafica** la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$, y **halla** las asíntotas verticales y horizontales.

4. **Determina** los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 5 \text{ sen } x \text{ si } x < -\frac{\pi}{2} \\ a \text{ sen }(x) + b \text{ si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos(x) + 3 \text{ si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

5. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 3x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

—**Calcula** los siguientes límites mediante las técnicas de cálculo sistemático.

a. $\lim_{x \to -3} f(x)$

b. $\lim_{x \to -2} f(x)$

c. $\lim_{x \to 1} f(x)$

d. $\lim_{x \to 2} f(x)$

6. **Calcula** las asíntotas de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^2 - 5}{x^4 - 1}$$

7. La población de un Estado, en millones de habitantes, se rige por la función siguiente:

$$P(t) = \frac{5(t-2)^3}{50 + (t-2)^2} + 30$$

a. **Calcula** la población actual ($t = 0$).

b. **Calcula** la población dentro de diez años.

c. ¿Qué sucede a medida que pasan los años?

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

El hotel infinito

La siguiente historia fue contada por el matemático David Hilbert, para intentar explicar el concepto de infinito.
Imagina un hotel con infinitas habitaciones. Un día, un viajero llega al hotel y pide una habitación, pero se encuentra con que todas están ocupadas. La recepcionista le dice que no se preocupe, y pide al huésped en la habitación 1 que se mude a la habitación 2, al de la habitación 2 a la habitación 3, y así sucesivamente. Ahora, todos los huéspedes seguían teniendo una habitación, y el viajero pudo tomar la habitación 1.
Otro día en que el hotel estaba lleno, un bus infinito llegó al hotel, con un número infinito de turistas. La recepcionista entonces pidió al huésped en la habitación 1 que se cambie a la habitación 2, al huésped de la habitación 2 a la habitación 4, y así el huésped en la habitación n se mudó a la habitación $2n$. Así solo las habitaciones pares estaban ocupadas, y los turistas pudieron ocupar las habitaciones impares sin ningún problema.



http://goo.gl/lsE2U4

SENTIDO CRÍTICO

La ley de Fechner-Weber

La psicología estudia la relación existente entre los estímulos recibidos (intensidad de la luz, volumen sonoro, peso sostenido...) y las sensaciones que dichos estímulos nos producen.
La ley de Fechner-Weber establece que las sensaciones, $S(x)$, crecen según el logaritmo neperiano de los estímulos, x:

$$S(x) = k \cdot \ln(x)$$

Imagina, por ejemplo, que estás escuchando música. Según esta ley, cuanto más alto esté el volumen de la música, más deberás elevarlo para que tu oído aprecie el incremento del sonido.

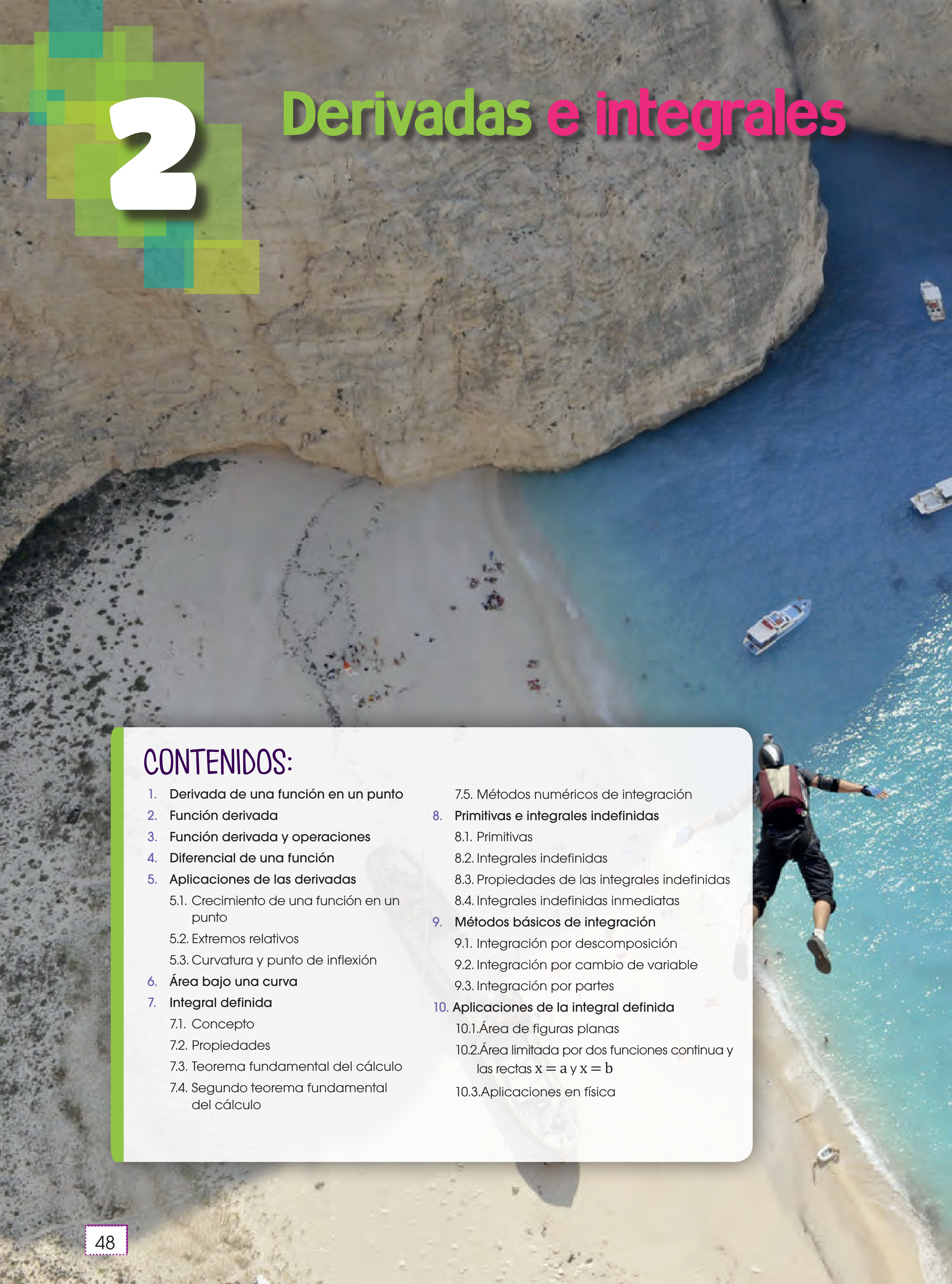
SI YO FUERA ...

Ingeniero civil

Utilizaría los límites para entender el comportamiento de una función. Dado que el peso y la distribución de carga estructural en una construcción pueden ser modelados mediante funciones, los ingenieros civiles deben poder mantener un equilibrio entre la cantidad de carga posible y su distribución para mantener una estructura sólida y segura. Los límites juegan un papel importante en estos cálculos.



http://goo.gl/QUYjdb



2 Derivadas e integrales

CONTENIDOS:



En Internet:

La optimización de funciones es un tema recurrente en varios ámbitos. En la página http://bit.ly/1z1cp6H encontrarás dos posibles soluciones a problemas de optimización de transporte.

EN CONTEXTO:

El salto base es un deporte extremo que consiste en saltar desde un objeto fijo con un paracaídas. Aplicando el cálculo integral es posible estimar la trayectoria de un saltador, y así tomar las precauciones necesarias.

TIC

Visita:

En el *link* http://www.geogebra.org/student/m95509 podrás encontrar un applet interactivo para afianzar tu conocimiento de derivadas en un punto gráficamente.

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Recuerda que la tasa de variación media (TVM) nos indica cuanto varía el valor de una función entre dos puntos cualesquiera. La derivada de una función nos informa acerca de su variación en un punto. Consideremos la función $f(x)=x^2+x$ y calculemos la tasa de variación media en intervalos del tipo $[1, x]$, con x cada vez más cercano a 1.

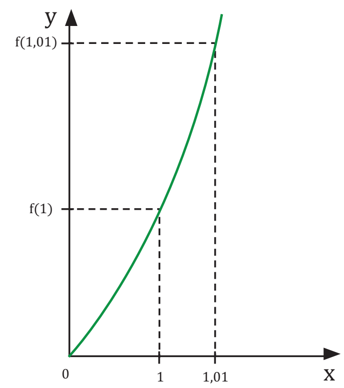


Fig. 1

Vemos que estas TVM se acercan cada vez más a 3, es decir, el límite de las TVM en los intervalos $[1, x]$, cuando x tiende a 1, es 3. Este valor, que conocemos como tasa de variación instantánea o derivada de f en el punto de abscisa $x = 1$ nos indica que, para valores de x muy próximos a 1, un pequeño aumento de x provoca un aumento del valor de $f(x)$ aproximadamente tres veces mayor.

En general:

Llamamos derivada de una función f a un punto de abscisa $x = a$ y la representamos por $f'(a)$ al límite, si existe: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

En consecuencia, decimos que la función f es derivable en el punto a. **Observa** que si hacemos $h = x - a$, se tiene que $x = a + h$. Además, si x tiende a a, la diferencia $h = x - a$ tiende a cero. Por lo tanto, también podemos escribir lo siguiente: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

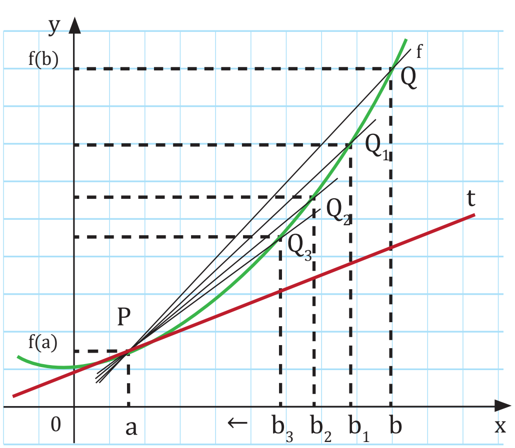


Fig. 2

Interpretación geométrica

Hemos visto que la tasa de variación media de una función f, en el intervalo $[a, b]$, es la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (b, f(b))$.

Cuando Q se acerca a P se tiene:

- La recta secante se aproxima a la recta tangente de P.
- La TVM tiende a la derivada de f en $x = a$

Luego podemos afirmar que:

La derivada de la función f en el punto de la abscisa $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$.

Actividades

1. **Calcula** la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados usando la definición de derivada.

   a. $f(x) = 6x - x^2$ en $x = -1$ b. $g(x) = \frac{x}{x-2}$ en $x = 3$

2. FUNCIÓN DERIVADA

Como hemos visto, si calculamos la derivada de una función f en un punto de abscisa $x = a$, obtenemos como resultado un número real.

Así, podemos definir una nueva función, f', que asigne a cada punto de abscisa x el valor de la derivada de f en este punto.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$, si el límite existe.

Esta función recibe el nombre de función derivada de f o, simplemente, derivada.

El dominio de esta función está formado por todos los puntos x_0 para los que la función f es derivable.

Ejemplo 1

Calculemos la función derivada de $f(x) = 2x^3$. Según la definición de función derivada, tendremos:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x^3} + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - \cancel{2x^3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6x^2 + 6xh + 2h^2)}{\cancel{h}} = 6x^2$$

A partir del cálculo de la función derivada de una función f, podemos hallar fácilmente el valor de la derivada de f en diferentes puntos. Así, para calcular $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(-3)$, siendo f la función del ejemplo anterior, bastará sustituir x por 0, 2 y -3 en la función derivada $f'(x)$:

$f'(0) = 6 \cdot 0^2 = 0$; $f'(2) = 6 \cdot 2^2 = 24$; $f'(-3) = 6 \cdot (-3)^2 = 54$

En la tabla 1 presentamos la derivada de las principales funciones.

Si consideramos la función de posición de un objeto dependiente del tiempo, la primera derivada es su velocidad instantánea, y la segunda derivada denota la aceleración en un instante t.

Función	Función derivada
$f(x) = k, k \in R$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x, a \neq 1 \wedge a > 0$	$f'(x) = a^x \ln a$

Tabla 1

Función	Función derivada
$f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen } x$
$f(x) = \text{tg } x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$f(x) = \text{cotg } x$	$f'(x) = \frac{-1}{\text{sen}^2 x} = -\csc^2 x$

Tabla 2

Derivadas de orden superior

En aquellos puntos del dominio de f' en que f' sea derivable, podemos considerar otra función, f'', que asigne a cada punto de abscisa x el valor de la derivada de f' en ese punto. La función así definida recibe el nombre de función derivada segunda de f, o simplemente, derivada segunda.

Análogamente, podemos definir las funciones $f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}$, denominadas derivada tercera, cuarta, quinta..., enésima de f.

3. FUNCIÓN DERIVADA Y OPERACIONES

Aplicando la definición de derivada y teoremas de los límites, obtenemos las propiedades para derivar funciones obtenidas de operaciones con otras funciones.

Propiedades	
Derivada de la función suma	Derivada del producto de una constante por una función
$f(x)= g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$	$f(x)= k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x), k \in \mathbb{R}$
Derivada de la función producto	Derivada de la función cociente
$f(x)= g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x)= \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
Derivada de la función compuesta: regla de la cadena	
$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$	

Tabla 3.

Sabiendo esto, podemos calcular de forma inmediata la derivada de cualquier función polinómica: $f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+ \cdots +a_1 x+a_0 \Rightarrow f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1) a_{n-1} x^{n-2}+\cdots +2a_2x + a_1$; $a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2

Hallemos la derivada de $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6$.

La función f es una suma de tres funciones:

$f_1(x) = x^5$; $f_2(x) = -4x^3$; $f_3(x) = 6$

Luego f será la suma de las derivadas de estas tres funciones:

$f' = f'_1 + f'_2 + f'_3$

Además, f_2 es el producto de una constante (-4) por una función (x^3). Por tanto:

$f_1(x) = x^5 \Rightarrow f'_1(x) = 5x^4$

$f_2(x) = -4x^3 \Rightarrow f'_2(x) = -4(x^3)' = -4 \cdot 3x^2 = -12x^2$

$f_3(x) = 6 \Rightarrow f'_3(x) = 0$

Luego: $f'(x) = 5x^4 - 12x^2$

Ejemplo 3

Hallemos la derivada de la función $f(x) = \text{sen}^2 x$.

La función f es la composición de dos funciones:

$g(x) = \text{sen } x$ y $h(x) = x^2$

cuyas derivadas son las siguientes:

$g'(x) = \cos x$; $h'(x) = 2x$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2 \text{ sen } x \cos x$

$= \text{sen }(2x)$

Calcula la derivada de $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}$. Utiliza la regla de la cadena para, a partir de ese resultado, obtener la derivada de $\log_a g(x)$ donde $g(x)$ sea derivable.

Actividades

2. **Calcula** las derivadas de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = 4x^6 - 3x^2 - \ln x + \cos x$
   b. $f(x) = \sqrt[5]{x^2} \ln x$

3. Dadas las funciones $f(x) = 5x^4$ y $g(x) = \ln x$, **halla**:
   a. $\left(\frac{f}{g}\right)'$ b. $\left(\frac{g}{f}\right)'$ c. $(g \circ f)'$ d. $(f \circ g)'$

4. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Recuerda que la tasa de variación media, la proporción media que una función f cambia en un espacio Δx, puede expresarse como $TVM = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Utilizando esta notación, podemos expresar $f'(x_0)$ como:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Si ahora consideramos la recta tangente a la función en x_0, la recta cuya pendiente es el valor de la derivada de $f(x_0)$, podemos representar el incremento de la recta tangente por df y el incremento de x por dx. Teniendo en cuenta que $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto x_0, tenemos:

$$dx = \Delta x$$

$$df = \tan \alpha \cdot dx$$

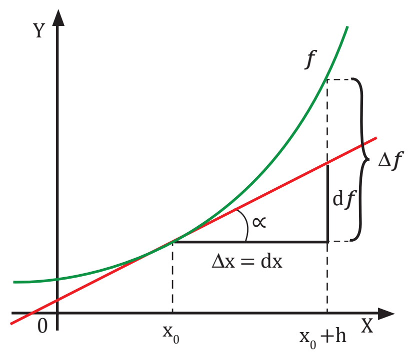


Fig. 3

Dado el hecho que $tg\ \alpha$ es la derivada de $f(x_0)$

$$\Delta f \approx df = f'(x_0) \cdot dx$$

Fíjate que para valores de Δx pequeños ($\Delta x = h$), df es una buena aproximación del incremento de la función f, ya que la función se parece a su línea tangente para valores pequeños de Δx. Entonces:

$$\Delta f \approx df = f'(x_0) \cdot h$$

Esta aproximación es práctica para calcular valores de la función cercanos a una x conocida a partir del uso de la tangente, que es una función más simple de calcular. Procedemos de la siguiente manera:

Δf representa el diferencial entre los valores de una función en $x = x_0$ y $x = x_0 + h$.

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Ya que Δf y df son aproximadamente iguales, al reemplazar obtenemos una fórmula para aproximar el valor de f a una distancia h del valor conocido en x_0:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

Ejemplo 4

Calculemos el aumento que experimenta el área de un cuadrado de 1 m de lado al incrementar en 1 cm el lado.

Consideremos la función $f(l) = l^2$ y sean $l = 1$ m y $h = 1$ cm $= 0{,}01$ m.

Puesto que $f'(l) = 2\,l$, según lo que acabamos de ver:

$$\Delta f \simeq f'(1) \cdot 0{,}01 = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02\ m^2$$

Observa que este valor se aproxima mucho al incrementoexacto del área:

$$\Delta A = A(l + \Delta l) - A(l) = (1 + 0{,}01)^2 - 1^2 = 0{,}020\,1\ m^2$$

Actividades

4. **Utiliza** la diferencial de una función para encontrar:

a. El volumen de metal necesario para construir una esfera hueca de 40 cm de diámetro exterior y 0,2 cm de espesor

b. El valor aproximado de $\sqrt{25{,}12}$

5. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Ya hemos definido los conceptos de la derivada de una función en un punto y función derivada. Ahora veremos cómo aplicarlos al estudio del crecimiento y curvatura de una función, así como sus puntos extremos y de inflexión.

5.1 Crecimiento de una función en un punto

Si f es una función derivable en el punto $x = a$, podemos determinar su crecimiento o decrecimiento en ese punto gracias al signo de la derivada.

Recuerda la definición de derivada de una función f en un punto $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Supongamos que $f'(a)>0$. Por la definición de límite, para valores de x cercanos a a se cumple que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, lo que significa que:

$$\begin{cases} \text{si } x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \\ \text{si } x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ \text{si } x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{cases}$$

Esto quiere decir que existe un vecindario de a en el que la función es estrictamente creciente. Por tanto, f es estrictamente creciente en $x = a$.

Igualmente si $f'(a) < 0$, obtenemos que la función es estrictamente decreciente en $x = a$.

Y TAMBIÉN:

- Una función f tiene un máximo relativo en a si existe un entorno de a tal que para todo x del entorno se cumple:

  $f(x) \leq f(a)$
- Una función f tiene un mínimo relativo en a si existe un entorno de a tal que para todo x del entorno se cumple:

  $f(x) \geq f(a)$
- Los máximos y los mínimos relativos de una función suelen llamarse extremos relativos de la función.

5.2 Extremos relativos

La función representada en la figura tiene dos extremos relativos: un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$.

Observa que en estos puntos la función no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente; por lo tanto, en ellos la derivada es cero, ya que no puede ser positiva ni negativa. Entonces, podemos afirmar que si una función f derivable tiene un extremo relativo en $x = a$, entonces $f'(a) = 0$.

No todos los puntos que tienen la primera derivada igual a cero son extremos relativos. Así, por ejemplo, si $f(x) = x^3$, verificamos que $f'(0) = 0$ y; sin embargo, $x = 0$ no es un extremo relativo de f. Veamos cómo distinguir si un extremo relativo es máximo o mínimo a partir del signo de la segunda derivada.

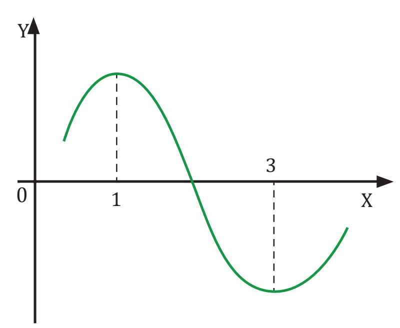


Fig. 4

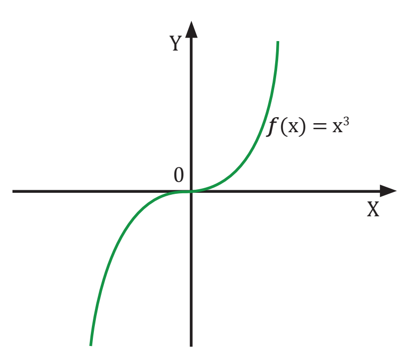


Fig. 5

CRITERIOS DE LA 2ª DERIVADA

Sea $f'(a) = 0$ y supongamos que $f''(a) < 0$. Como f'' es la derivada de f', $(f')'(a) < 0$ implica que f' es estrictamente decreciente en $x = a$. En este caso, alrededor de ese punto:

$$\begin{cases} \text{Para } x < a \Rightarrow f'(x) > f'(a) = 0 \\ \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } x. \\ \text{Para } x > a \Rightarrow f'(x) < f'(a) = 0 \\ \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } x. \end{cases}$$

En $x = a$, la función f pasa de ser creciente a ser decreciente. f tiene un máximo relativo en $x = a$. Análogamente, si $f''(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en $x = a$. Podemos entonces enunciar el siguiente resultado

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ f tiene un máximo relativo en $x = a$

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Ejemplo 5

Estudiemos los extremos relativos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

- Calculamos la función derivada de f: $f'(x) = 6x^2 - 6x$, y resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ y } x = 1$$

- Calculamos la función derivada segunda de f: $f''(x) = 12x - 6$
- Analizamos el signo de f'' en cada uno de los puntos en que se anula f':

$f''(0) = 12 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x = 0$.
$f''(1) = 12 \cdot 1 - 6 = 6 > 0 \rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

Actividades

5. **Encuentra** los extremos relativos de las siguientes funciones.

   a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9 + 1$ c. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$

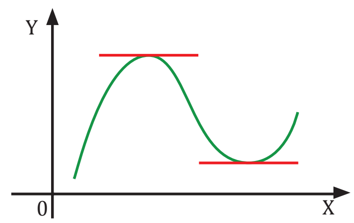
   b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ d. $f(x) = e^{-x^2}$

6. Sabiendo los resultados del ejercicio 6, **describe** en qué intervalos la función es creciente o decreciente.

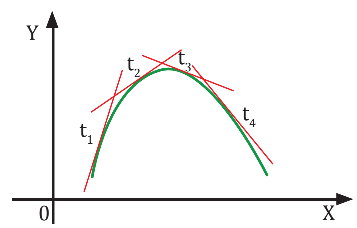
Y TAMBIÉN: ¿?

Extremos relativos y recta tangente

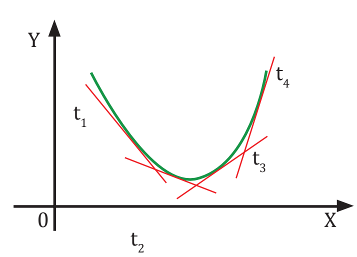
- Si $x = a$ es un extremo relativo de una función derivable f, la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ es horizontal, pues $f'(a) = 0$.



- Si una función derivable f tiene un máximo en $x = a$, las pendientes de las rectas tangentes decrecen en un entorno de a.



- Si una función derivable f tiene un mínimo en $x = a$, las pendientes de las rectas tangentes crecen en un entorno de a.



5.3 Curvatura y punto de inflexión

Observa la figura. Vemos que alrededor de $x = 1$ la función es mayor que su tangente en el mismo punto. En este caso, decimos que f es convexa en $x = 1$. Además vemos que alrededor de $x = 4$ la ordenada de la función es menor que la de la recta tangente. Entonces diremos que f es cóncava en $x = 4$.

Si f es dos veces derivable en un punto $x = a$, podemos determinar su curvatura en ese punto de esta forma:

Si $f''(a) > 0 \rightarrow f$ es convexa en $x = a$.

Si $f''(a) < 0 \rightarrow f$ es cóncava en $x = a$.

En la figura también vemos que en $x = 3$ la recta tangente atraviesa la gráfica. Decimos entonces que $x = 3$ es un punto de inflexión de la función. Observa que es en el punto de inflexión donde la función pasa de ser convexa a ser cóncava; por lo tanto, en este punto, la segunda derivada no puede ser ni positiva ni negativa, consecuentemente debe ser cero. Se puede afirmar que:

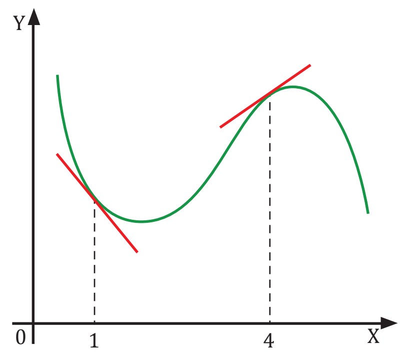


Fig. 6

Si una función f dos veces derivable tiene un punto de inflexión en $x = a$, entonces $f''(a) = 0$.

Ten en cuenta que el recíproco no es cierto. Por ejemplo si $f(x) = x^4$, a pesar de que verificamos que $f''(0) = 0$, $x = 0$ no es un punto de inflexión.

Si existe $f'''(a)$ podemos demostrar el siguiente resultado:

Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0 \rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x = a$.

En ocasiones, puede suceder que en un punto $x = a$ se anulen las derivadas segunda, tercera y, así, sucesivamente. Entonces, debemos seguir derivando la función hasta hallar una derivada que no se anule en ese punto. Si el orden de esta derivada es par y además $f'(a) = 0$, f tiene un extremo en $x = a$; si es impar, f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Actividades

7. **Determina** los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad o convexidad de las siguientes funciones y grafique.

a. $f(x) = x^3 - x^2$

b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

c. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

e. $f(x) = \sqrt{(2 - x^3)}$

f. $f(x) = \tan x$ entre $-\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2}$

6. ÁREA BAJO UNA CURVA

En geometría elemental, deducimos fórmulas que permiten calcular el área de cualquier figura plana limitada por segmentos rectilíneos. Pero ¿cómo podemos calcular el área del recinto representado en la figura 1?

Podemos obtener aproximaciones de esta área mediante distintos procedimientos. Fíjate, por ejemplo, en los siguientes:

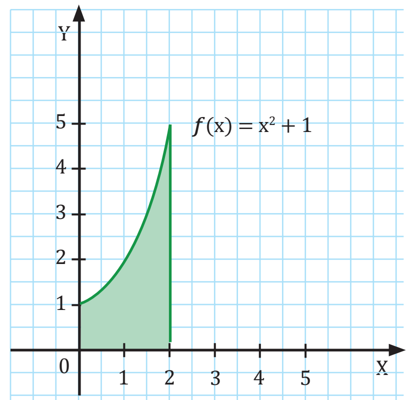


Fig. 7

Procedimiento 1:

Dividimos el intervalo $[0, 2]$ en subintervalos iguales y levantamos sobre cada uno de ellos un rectángulo cuya altura coincida con el valor de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el extremo inferior del subintervalo.

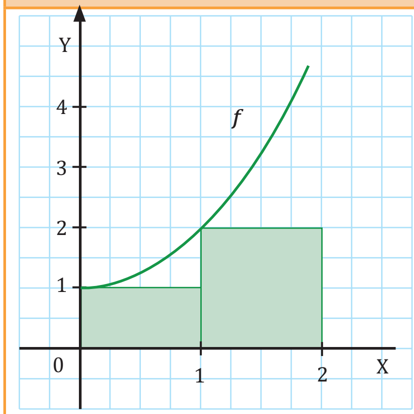
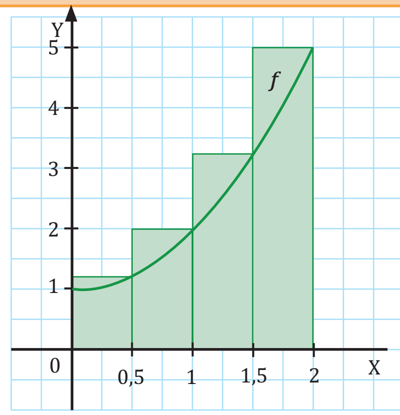
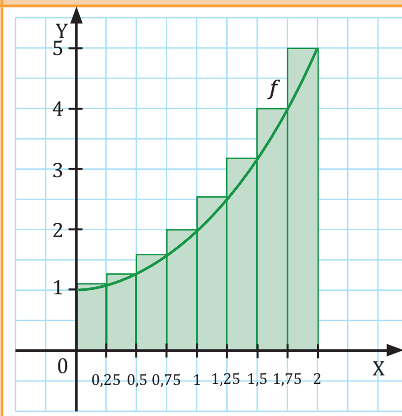
$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$
		

Tabla 4.

- Consideramos la suma de las áreas de estos rectángulos, S_n, en la que n es el número de subintervalos. Así:

Para $n = 2$:

$$s_2 = 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

Para $n = 4$:

$$s_4 = 0{,}5 \cdot f(0) + 0.5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5)$$
$$= 0{,}5 \cdot (1 + 1{,}25 + 2 + 3{,}25) = 3{,}75$$

Para $n = 8$:

$$s_8 = 0.25 \cdot f(0) + 0{,}25 \cdot f(0{,}25) + 0{,}25 \cdot f(0{,}5) + 0{,}25 \cdot f(0{,}75) + 0{,}25 \cdot f(1) + 0{,}25 \cdot f(1{,}25) + 0{,}25 \cdot f(1{,}5) + 0{,}25 \cdot f(1{,}75)$$
$$= 0{,}25 \cdot (1 + 1{,}0625 + \cdots + 4{,}0625) = 4{,}1875$$

Con la ayuda de una computadora, obtenemos:

$s_{100} = 4{,}6268$, $s_{1\,000} = 4{,}6627$, $s_{10\,000} = 4{,}6663$

Y TAMBIÉN: ¿?

Fíjate que si A es el área que buscamos:.

- Mediante este procedimiento y para la gráfica usada, $s_n \leq A$ para cualquier cantidad de intervalos n. Por tanto s_n es una aproximación por defecto del área.
- Esta aproximación es más precisa cuanto más grande sea n.

Procedimiento 2:

Dividimos el intervalo $[0, 2]$ en subintervalos iguales y levantamos sobre cada uno de ellos un rectángulo cuya altura coincida con el valor de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el extremo superior del subintervalo.

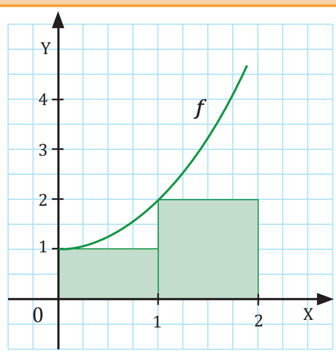
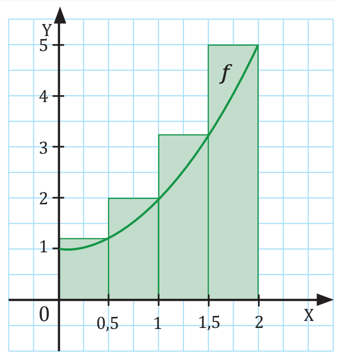
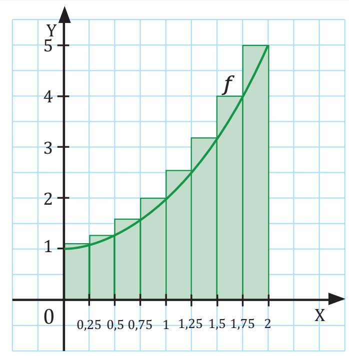
n = 2	n = 4	n = 8
		

Tabla 5.

Consideramos la suma de las áreas de estos rectángulos, S_n, en la que n es el número de subintervalos. Así:

- Para $n = 2$:

  $S_2 = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = (2 + 5) = 7$

- Para $n = 4$:

  $S_4 = 0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5) + 0{,}5 \cdot f(2) = 5{,}75$

- Para $n = 8$:

  $S_8 = 0{,}25 \cdot f(0{,}25) + 0{,}25 \quad f \cdot (0{,}5) + 0{,}25 \cdot f(0{,}75) + 0{,}25 \cdot f(1) + 0{,}25 \cdot f(1{,}25) + 0{,}25 \cdot f(1{,}5) + 0{,}25 \cdot f(1{,}75) + 0{,}25 \cdot f(2) = 5{,}1875$

Con la ayuda de un ordenador, obtenemos:

$S_{100} = 4{,}7068 \qquad S_{1\,000} = 4{,}4707 \qquad S_{10\,000} = 4{,}6671$

TIC

Visita:

A los procedimientos practicados los conocemos como sumas de *Riemann*. En el *link* https://www.desmos.com/calculator/tgyr42ezjq podemos encontrar un *widget* interactivo para visualizar el procedimiento en acción.

Fíjate que si A es el área que buscamos:

- Mediante este procedimiento y para la gráfica usada, $s_n \geq A$ para cualquier cantidad de intervalos n. Por tanto s_n es una aproximación por exceso del área.
- Esta aproximación es más precisa cuanto más grande sea n.

Combinando los resultados de ambos procedimientos, verificamos que, para cualquier n:

$$s_n \leq A \leq S_n$$

Podemos entonces concluir que el área buscada será 4,66....

7. INTEGRAL DEFINIDA

7.1 Concepto

El método descrito en el apartado anterior puede generalizarse para obtener el área de regiones como la de la figura de la derecha. Esta región está limitada por la gráfica de una función f, continua y positiva en $[a, b]$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

En efecto:

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales:

$$[t_0, t_1],[t_1, t_2], \dots, [t_{i-1}, t_i], \dots, [t_{n-1}, t_n]$$

  Con $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$.

  Puesto que f es continua podemos asegurar que f tiene un valor mínimo y máximo en cada uno de estos subintervalos.

  Sea mi el valor mínimo y Mi el valor máximo en el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

- Levantamos sobre cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ dos rectángulos, uno de altura mi y otro de altura Mi (podemos observar el caso correspondiente a $n = 4$ en la figura).

- Calculamos la suma S_n de las áreas de los rectángulos inferiores, y la suma S_n de las áreas de los rectángulos superiores.

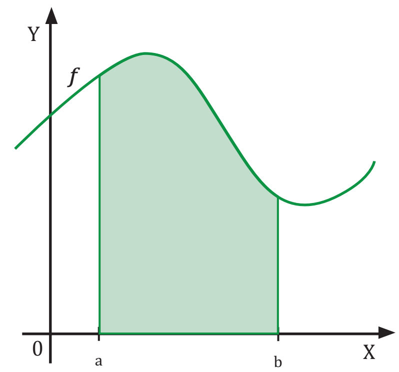


Fig. 8.

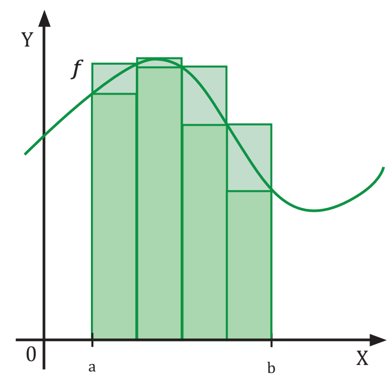


Fig. 9.

$$S_n = m_1 (t_1 - t_0) + m_2 (t_2 - t_1) + \cdots + m_n (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

$$S_n = M_1 (t_1 - t_0) + M_2 (t_2 - t_1) + \cdots + M_n (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

Observa que:

- Para cualquier valor de n, $s_n \leq A \leq S_n$.
- Al aumentar el número de subintervalos, las sumas inferiores crecen y las sumas superiores decrecen, de forma que se acercan cada vez más a un valor común que es el valor exacto del área.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Diremos que este valor es la integral definida de f entre a y b.

Si la función f no es positiva en $[a, b]$, podemos definir también las sumas inferiores y las sumas superiores, y sigue verificándose que, al aumentar el número de subintervalos, las dos sumas se acercan a un valor común. Como en el caso anterior, diremos que este valor común es la integral definida de f entre a y b, y escribiremos:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

El símbolo $\int$ se llama símbolo de integral, y los números a y b reciben el nombre de límites de integración inferior y superior.

Y TAMBIÉN: ¿?

Podríamos expresar las sumas de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores de la siguiente forma:

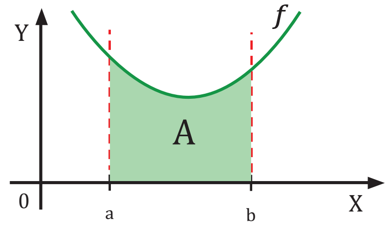
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i = (t_i - t_{i-1})$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} M_i = (t_i - t_{i-1})$$

y el valor de la integral definida entre a y b como:

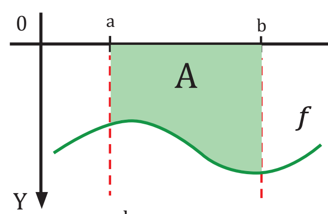
$$\lim_{n\to\infty} = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$



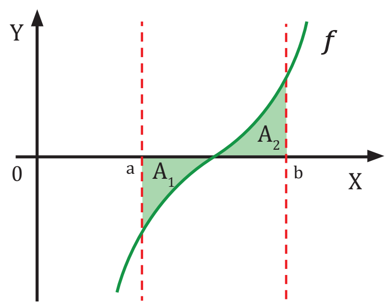
$\int_a^b f(x)dx = A$

Fig. 10



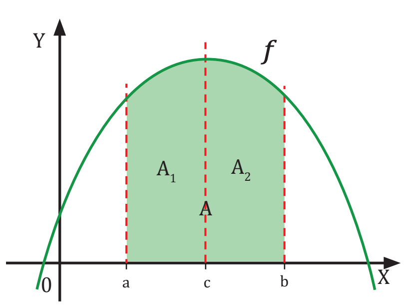
$\int_a^b f(x)dx = -A$

Fig. 11



$\int_a^b f(x)dx = -A_1 + A_2$

Fig. 12



$A = A_1 + A_2$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Fig. 13

7.2 Propiedades

Entre las propiedades que tienen las integrales definidas, destacamos las siguientes:

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx;\ a < b$

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3. Signo de la integral definida:

   - Si $f(x) \geq 0$ para todos los valores de x en el intervalo $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ y, $\int_a^b f(x)\,dx = A$, siendo A el área limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.
   - Si $f(x) \leq 0$ para todos los valores de x en el intervalo $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ y, $\int_a^b f(x)\,dx = -A$, siendo A el área limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.
   - Si f toma valores positivos y negativos en el intervalo $[a, b]$, no podemos determinar el signo de $\int_a^b f(x)dx$. En este caso, representa la suma algebraica de las áreas encerradas correspondientes.

4. $\int_a^b (f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx$, para $a < c < b$

   En la figura c podemos observar esta propiedad gráficamente para una función positiva en $[a, b]$.

5. $\int_a^a (f(x)dx = 0$

   Esta propiedad es consecuencia de que, al coincidir a y b, la sección limitada por la gráfica, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, se reduce a un segmento de recta y, por lo tanto, tiene área cero.

6. Si $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

   La integral definida $\int_a^b f(x)dx$, como se ha definido, solo tiene sentido para: $a < b$. Asimismo, a veces conviene considerar integrales definidas con límite inferior más grande que el superior. Así, si $a > b$, definimos:

7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

7.3 Teorema fundamental del cálculo

Veamos la relación que hay entre una *función* f y la *integral*. Sea f una función continua en $[a, b]$. Para cualquier punto x en este intervalo, podemos considerar la integral definida:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Como esta integral toma un único valor para cada punto, $A(x)$ es una función que llamamos *función integral* de f.

Observa en la gráfica que la expresión $A(x+h) - A(x)$ representa, aproximadamente, el área del rectángulo de base h y altura $f(x + h)$. Cuando h tiende a 0, tenemos que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

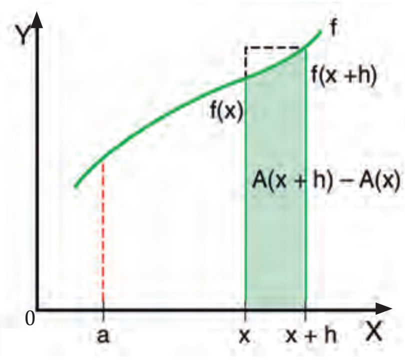


Fig. 14

Pero el miembro de la izquierda es por definición $A'(x)$. Por lo tanto:

$$A'(x)= f(x)$$

7.4 Segundo teorema fundamental del cálculo

A partir del primer teorema fundamental del cálculo, podemos demostrar que, si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una función tal que $F'(x) = f(x)$, se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$, donde F es cualquier antiderivada de F

A la diferencia $F(b) - F(a)$ denotamos como $[F(x)]_a^b$.

Este resultado, conocido como el *segundo teorema fundamental del cálculo* o también *regla de Barrow* permite calcular integrales definidas sin necesidad de calcular sumas superiores e inferiores.

Ejemplo 6

1. Buscamos una función F, tal que: $F' = f$.
Como $(x^2)' = 2x$, tenemos que $f(x) = x^2$.

2. Calculamos $F(a)$ y $F(b)$. Así, pues:

$$F(1) = 1^2 = 1 \,,\, F(4) = 4^2 = 16$$

3. Determinamos la integral definida aplicando la regla de Barrow:

$$\int_1^4 2x\,dx = [x^2]_1^4 = 16 - 1 = 15$$

Actividades

8. **Utiliza** el teorema fundamental del cálculo para calcular.

a. $\int_0^3 (3x^2 - 6)\,dx$ b. $\int_2^5 \left(6 + \cos\left(\frac{x}{10}\right)\right) dx$

7.5 Métodos numéricos de integración

A veces no es posible aplicar el segundo teorema del cálculo, ya sea porque no conocemos la expresión analítica de la función f a integrar, o bien porque la función F, tal que $F' = f$ es difícil de calcular.

En estos casos, podemos recurrir a varios métodos numéricos que nos permitirán hallar el valor de una integral definida con tanta aproximación como sea necesaria.

Las sumas inferiores y superiores que vimos previamente en este capítulo son dos ejemplos de estos métodos. Cabe destacar también el método de los trapecios, que desarrollaremos a continuación.

Observa la figura. El método de los trapecios consiste en aproximar el área comprendida entre el eje de abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función f para la suma de las áreas de cada uno de los trapecios que se forman al considerar una división del intervalo $[a, b]$. Para hacerlo, procedemos de este modo:

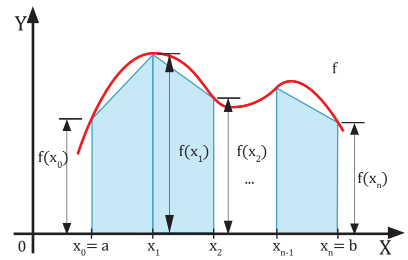


Fig. 15

1. Dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en n subintervalos de la misma amplitud:

   $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$

2. Utilizando los valores de las imágenes $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ calculamos y sumamos el área de los trapecios formados.

$$\int_a^b f'(x)\,dx \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right) + h \cdot \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right) + \cdots + h \cdot \left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Donde h es la amplitud de cada subintervalo.

Observa que todos los términos, menos los extremos, se suman dos veces. Por esto, la fórmula del método de los trapecios resulta como: $\int_a^b f'(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f'(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$

Ejemplo 7

Halla $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ por el método de los trapecios dividiendo el intervalo de integración en ocho partes.

1. Dividimos el intervalo $[0, 2]$ en ocho partes; luego la longitud de cada subintervalo es $h = \frac{2}{8} = 0{,}25$

   Así, pues, los puntos que obtenemos son:

   $x_0 = 0, x_1 = 0{,}25, x_2 = 0{,}5, \dots, x_7 = 1{,}75, x_8 = 2$

2. Construimos una tabla (tabla 1) con los puntos que hemos obtenido y sus imágenes por la función integrando.

3. Aplicamos la fórmula de los trapecios:

$$\int_0^2 (x^2+1)dx$$

$$\approx 0{,}25\left(\frac{1}{2} + 1{,}0625 + 1{,}25 + 1{,}5625 + 2 + \right.$$

$$\left. + 2{,}5625 + 3{,}25 + 4{,}0625 + \frac{5}{2}\right) = 4{,}6875$$

Actividades

9. **Utiliza** sumas inferiores, superiores y el método de los trapecios para calcular aproximadamente el área comprendida entre el eje x, las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y la gráfica de la función $y = f(x)$, a la que pertenecen los puntos en esta tabla:

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	4	3,89	3,58	3,14	2,59	2

10. Las rectas $y = 3x$ y $y = -x + 8$, junto con el eje de abscisas, determinan un triángulo. **Halla** el área usando el cálculo integral y **comprueba** que se obtiene el mismo resultado por un procedimiento geométrico.

8. PRIMITIVAS E INTEGRALES INDEFINIDAS

8.1 Primitivas

Al inicio de la unidad, vimos cómo obtener la función derivada de una función f. Ahora nos planteamos el problema inverso: dada una función f, hallar otra función F cuya derivada sea f.

De este modo, si $f(x) = 2x$, una posibilidad para F sería $F(x) = x^2$, ya que $F'(x) = f(x)$.

Decimos que una función F es una primitiva o antiderivada de f si y solo si $F'(x) = f(x)$.

Fíjate que $F_1(x) = x^2 + 3$, $F_2(x) = x^2 + 9$ y $F_3(x) = x^2 - 2$ también son primitivas de $f(x) = 2x$, por cuanto la derivada de todas ellas es $2x$. Sucederá lo mismo con cualquier función de la forma $F + C$, siendo C una constante, puesto que si la derivada de una constante es igual a cero, tenemos:

$$(F+C)'(x) = F'(x)+0 = f(x) + 0 = f(x), \text{ siendo } C \text{ una constante real}$$

Por tanto, podemos afirmar que:

Si F es una primitiva de f, también son primitivas de f todas las funciones de la forma $F + C$, siendo $C \in \mathbb{R}$.

8.2 Integrales indefinidas

Dado que existen infinitas primitivas de una misma función, tiene sentido considerar el conjunto que forman todas.

El conjunto formado por todas las primitivas de una función f recibe el nombre de integral indefinida, y la denotamos por:

$$\int f(x)dx$$

De este modo, si F es una primitiva de f, escribiremos

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante llamada constante de integración.

8.3 Propiedades de las integrales indefinidas

Como consecuencia de las propiedades de la derivada respecto al producto de una función por una constante y respecto a la suma de funciones, la integral indefinida cumple que:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

8.4 Integrales indefinidas inmediatas

A partir de las derivadas de funciones conocidas, podemos obtener de manera inmediata las siguientes propiedades de integrales indefinidas.

Tabla de teoremas de integrales indefinidas inmediatas	
• $\int 0dx = C$	• $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + C$
• $\int dx = x + C$	• $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cotg } x + C$
• $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1$	• $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc sen } x + C = -\text{arc cos } x + C$
• $\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	• $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arc tg } x + C = -\text{arc cotg } x + C$
• $\int e^x dx = e^x + C$	
• $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \forall a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$	
• $\int \text{sen } x \, dx = -\cos x + C$	
• $\int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$	

Tabla 6

A partir de esta tabla, podemos integrar de manera sencilla algunas funciones, como puedes ver en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8

Calculemos las integrales: a. $\int \sqrt[4]{x^3} \, dx$, b. $\int 2^x \, dx$

a. $\int \sqrt[4]{x^3} \, dx$: Expresemos la raíz en forma de potencia. Se trata, entonces, de una función del tipo $f(x) = x^n$. Así, pues:

$$\int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{7} x\sqrt[4]{x^3} + C$$

b. $\int 2^x \, dx$: Se trata de una función del tipo $f(x) = a^x$. Su integral será, por tanto:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Una manera de comprobar si una integral está bien calculada es derivar el resultado y ver que coincida con el integrando.

Existen integrales indefinidas que no se pueden calcular directamente a partir de la tabla, como: $\int (\cos x^2)2x \, dx$.

Sin embargo, observamos que $\text{sen } (x^2)$ es una primitiva de $(\cos x^2)2x$, ya que, si derivamos, por la regla de la cadena:

$$(\text{sen } x^2)' = (\cos x^2)(x^2)' = (\cos x^2)2x$$

Así pues:

$$\int (\cos x^2) \, 2x \, dx = \text{sen } x^2 + C$$

En general, si F es una primitiva de f:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

Según este resultado, podemos volver a escribir la tabla de integrales inmediatas sustituyendo x por $g(x)$ y dx por $g'(x)\,dx$. Podemos ver una tabla completa de integrales inmediatas al final de la unidad.

Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 9

Calculemos $\int sen^3 x \cos x\, dx$

Puesto que $sen^3 x = (sen\, x)^3$ y $(sen\, x)' = \cos x$, el integrando es de la forma $(g(x))^n g'(x)$, con $g(x) = sen\, x$. Luego tenemos:

$$\int sen^3 x \cos x\, dx = \frac{sen^4 x}{4} + C$$

Ejemplo 10

Calculemos $\int \frac{x}{x^2+4}\, dx$.

El integrando sería de la forma $\frac{1}{g(x)}\, g'(x)$ con $g(x) = x^2+4$ si hubiese el factor 2, ya que $g'(x) = 2x$. Así, pues, para obtener este factor, multiplicamos y dividimos la integral por 2 y aplicamos la expresión correspondiente.

$$\int \frac{x}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot \frac{x}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$$

Ejemplo 11

Calculemos $\int e^{5x+1}\, dx$.

El integrando sería de la forma $e^{g(x)}\, g'(x)$ con $g(x) = 5x+1$ si hubiese el factor 5, ya que $g'(x) = 5$. Así, pues, para obtener este factor, multiplicamos y dividimos la integral por 5 y aplicamos la expresión correspondiente:

$$\int e^{5x+1}\, dx = \int \frac{1}{5}\cdot 5\cdot e^{5x+1}\, dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x+1}\, dx = \frac{1}{5}e^{5x+1} + C$$

Propiedades generalizadas de integrales inmediatas

- $\int (g(x))^n g'(x)\, dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$ $(\forall n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{g(x)}\, g'(x)\, dx = \ln g(x) + C$
- $\int e^{g(x)} g'(x)\, dx = e^{g(x)} + C$
- $\int a^{g(x)} g'(x)\, dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C,\ \forall a \in \mathbb{R}^+$
- $\int sen\, g(x)\, dx = -\cos g(x) + C$
- $\int \cos g(x)\, g'(x)\, dx = sen\,[g(x) + C]$
- $\int \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}\, dx = tg\,[g(x)] + C$
- $\int \frac{g'(x)}{sen^2 g(x)}\, dx = -cotg\,[g(x)] + C$
- $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}\, dx = -arc\,sen\,[g(x)] + C = -arc\cos\,[g(x)] + C$
- $\int \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}\, dx = arc\,tg\,[g(x)] + C = -arc\,cotg\,[g(x)] + C$

Tabla 7

Actividades

11. **Halla** las integrales siguientes:

a. $\int x^7\, dx$ b. $\int \frac{1}{x^4}\, dx$ c. $\int 5^x\, dx$ d. $\int \sqrt{x^3}\, dx$

12. **Utiliza** las propiedades de las integrales para calcular las integrales siguientes:

a. $\int (x+1)^2\, dx$ b. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) dx$

13. **Determina** estas integrales:

a. $\int (x4 - 3x)^5 (4x^3 - 3)\, dx$ b. $\int cotg\, x\, dx$ c. $\int x^2 e^{x^3} dx$ d. $\int \frac{x^2}{x^3+2}\, dx$

9. MÉTODOS BÁSICOS DE INTEGRACIÓN

En general, el cálculo de la integral de una función no es tan inmediato como hemos visto hasta ahora.

A continuación, veremos algunos métodos para reducir el cálculo de una integral al de una o diversas integrales inmediatas.

9.1 Integración por descomposición

Este método consiste en expresar la función integrando como suma de otras funciones que sabemos integrar de manera inmediata, y aplicarles las propiedades de la integral indefinida.

Ejemplo 12

Calculemos $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx$

Aplicamos las propiedades de la integral indefinida y tenemos:

$$\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx =$$

⇧ por la propiedad 1

$$= \int \frac{5}{\cos^2 x} dx - \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{5}{\sqrt{x}} dx =$$

⇧ por la propiedad 2

$$= 5\int \frac{1}{\cos^2 x} dx - 2\int \frac{1}{x} dx + 5\int x^{\frac{-1}{2}} dx =$$

$$= 5 \text{ tg } x - 2\ln x + 10\sqrt{x} + C$$

Ejemplo 13

Calculemos $\int \frac{(\sqrt{x} - 2x)^2}{\sqrt{x}} dx.$

Si desarrollamos el cuadrado del numerador y dividimos por el denominador, la integral se descompone en tres integrales inmediatas:

$$\int \frac{(\sqrt{x} - 2x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x - 4x\sqrt{x} + 4x^2}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{4x^2}{\sqrt{x}}\right) dx =$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} - 4x + 4x^{\frac{3}{2}}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int 4x\, dx + \int 4x^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4x^2}{2} + \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2x^2 + \frac{8}{5} x^2\sqrt{x} + C$$

Ejemplo 14

Calculemos $\int \frac{3 + x}{1 + x^2} dx.$

Si descomponemos el integrando como una suma de fracciones, obtenemos dos integrales inmediatas:

$$\int \frac{3 + x}{1 + x^2} dx = \int \left(\frac{3}{1 + x^2} + \frac{x}{1 + x^2}\right) dx = \int \frac{3}{1 + x^2} dx + \int \frac{x}{1 + x^2} dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{1 + x^2} dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2} dx = 3 \text{ arc tg } x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

Actividades

14. **Utiliza** el método de descomposición para calcular las integrales siguientes:

a. $\int (\sqrt{x} + 2)^4 dx$

b. $\int \frac{1 - x}{\sqrt{x}} dx$

c. $\int \frac{9^x + 6^x}{3^x} dx$

d. $\int \frac{x^3 + 4x + 3}{x} dx$

e. $\int \frac{4 + 3x}{1 + x^2} dx$

9.2 Integración por cambio de variable

Este método consiste en reemplazar una parte del integrando con una nueva variable, con la finalidad de obtener una integral más sencilla.

Procedemos del siguiente modo:

1. Sustituimos la variable x por t. Esta sustitución puede conseguirse haciendo:

   $x = g(t) \rightarrow dx = g'(t)dt$ o bien, $g(x) = t \rightarrow g'(x)dx = dt$ y sustituyendo en el integrando hasta obtener una función dependiente solo de t.

2. Calculamos la nueva integral.

3. Deshacemos el cambio de variable efectuado en el paso 1. para expresar el resultado en función de x.

Ejemplo 15

Calculemos $\int x\sqrt{x+2}\,dx$:

1. Sustituimos la variable x por t.
Para hacerlo, hacemos el cambio de variable $x + 2 = t$. Por tanto: $dx = dt$. Además, si $x + 2 = t$, entonces $x = t - 2$, y sustituyendo en la integral inicial, tenemos:

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \int (t-2)\sqrt{t}\,dt = \int (t-2)t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

2. Calculamos la nueva integral:

$$= \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{t^5} - \frac{4}{3}\sqrt{t^3} + C$$

3. Deshacemos el cambio de variable:

$$\frac{2}{5}\sqrt{t^5} - \frac{4}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$$

Ejemplo 16

Calculemos $\int \operatorname{sen} x\sqrt{(1-\cos x)}\,dx$.

En esta integral, podemos identificar la estructura $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$ donde:

$$f(x) = \sqrt{x}\ ;\ g(x) = 1 - \cos x\ ;\ f(g(x)) = \sqrt{1-\cos x}\ ;\ g'(x) = \operatorname{sen} x$$

Calculamos la integral de la función f:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

Componemos el resultado con la función g:

$$F(g(x)) + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1-\cos x)^3} + C$$

Así pues:

$$\int \operatorname{sen} x\sqrt{(1-\cos x)}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1-\cos x)^3} + C$$

9.3 Integración por partes

A partir de la regla de derivación del producto de dos funciones derivables, f y g, podemos deducir un método para integrar el producto de dos funciones. **Observa:**

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)\, g'(x)$$

Por lo tanto:

$$f(x)\, g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$$

Si ahora integramos ambos miembros de esta última expresión y aplicamos las propiedades de la integral indefinida, se tiene:

$$\int f(x)\, g'(x)dx = \int (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)dx = \int (f(x)g(x))'\, dx - \int f'(x)g(x)dx$$

y como la integración y la derivación son operaciones inversas:

$$\int f(x)\, g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Si en esta expresión consideramos:

$$f(x) = u \rightarrow f'(x)dx = du;\ g(x) = v \rightarrow g'(x)dx = dv$$

la obtendremos en su notación clásica como:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

La aplicación de esta expresión, que reduce el cálculo de una integral al de otras más sencillas, se conoce como método de integración por partes.

En la práctica, para calcular una integral por partes, procedemos del siguiente modo:

1. Identificamos en el integrando u y dv, y calculamos du y v.
2. Aplicamos la expresión $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.
3. Resolvemos la nueva integral.

Veamos, a continuación, un ejemplo resuelto.

TIC

Visita:

En la página https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/integration-techniques puedes reforzar tu conocimiento de los métodos de integración, así como conocer otras técnicas para integrar funciones más complejas.

Ejemplo 17

Calculemos $\int 2\, x \cos x\, dx$.

1. Identificamos en el integrando u y dv, y calculamos du y v:

$$u = 2x \rightarrow du = 2dx$$
$$dv = \cos x\, dx \rightarrow v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$

2. Aplicamos la expresión : $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$\int 2x \cos x\, dx = 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x\, dx$$

3. Resolvemos la nueva integral:

$$\int 2 \operatorname{sen} x\, dx = 2\int \operatorname{sen} x\, dx = -2 \cos x$$

Por tanto: $\int 2\, x \cos x\, dx = 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C$

10. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Ya vimos la relación que hay entre la integral definida de una función en un intervalo (a, b) y el área limitada por la gráfica de esta función, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$.

A continuación, se verá como podemos calcular estas áreas, así como otras aplicaciones de la integral definida en el campo de la física y de las ciencias sociales.

10.1 Área de figuras planas

Área limitada por la gráfica de una función continua, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ de la propiedad ID.3 se deduce que:

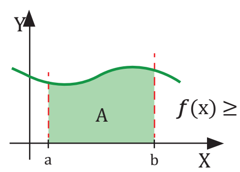
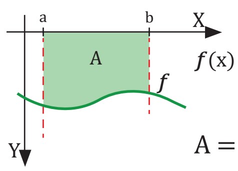
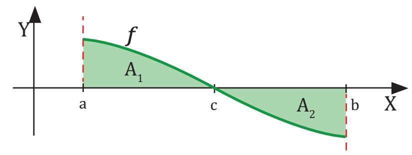
Si f tiene signo constante en $[a, b]$		Si f cambia de signo en $[a, b]$
 $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b]$ ⇩ $A = \int_a^b f(x)\,dx$	 $f(x) \leq 0 \; \forall x \in [a, b]$ ⇩ $A = -\int_a^b f(x)\,dx$	 $A = A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$
$A = \left\lvert \int_a^b f(x)\,dx \right\rvert$		$A = \left\lvert \int_a^c f(x)\,dx \right\rvert + \left\lvert \int_c^b f(x)\,dx \right\rvert$

Tabla 8.

Luego, para calcular el área A de una región determinada por la gráfica de una función f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, debemos ver si f tiene signo constante en $[a, b]$ o, por el contrario, cambia de signo. Procederemos del siguiente modo:

1. Hallamos los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje OX; es decir, los ceros de f.
2. Determinamos si existen ceros de f en el intervalo $]a, b[$:

   - Si no existe ningún cero de f en el intervalo $]a, b[$, el área coincide con el valor absoluto de la integral definida entre a y b.
   - Si existen ceros de f en el intervalo (a, b), el área será la suma de los valores absolutos de las integrales definidas en cada uno de los subintervalos determinados por a, b y estos ceros.

Ejemplo 18

Hallemos el área del recinto delimitado por la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

1. Hallamos los ceros de f:
   $-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$
2. No existe ningún cero de f en $]0, 2[$; luego:

$$A = \left\lvert \int_0^2 (-x^2 + 4)\,dx \right\rvert = \left\lvert \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 \right\rvert =$$

$$= \left\lvert \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 4 \cdot 0 \right) \right\rvert = \frac{16}{3} \Rightarrow A = \frac{16}{3} u^2$$

Ejemplo 19

Hallemos el área del recinto delimitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.

1. Hallamos los ceros de f: $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. No existe ningún cero de f en $]-1, 0[$; luego:

$$A = \left\lvert \int_{-1}^0 x^3\,dx \right\rvert = \left\lvert \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 \right\rvert =$$

$$= \left\lvert \left[\frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right] \right\rvert = \left\lvert -\frac{1}{4} \right\rvert = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{4} u^2$$

Ejemplo 20

Ahora, hallemos el área de la figura determinada por la función $f(x) = -x^2 + x + 6$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 4$.

1. Hallamos los ceros de f: $-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ y $x = 3$
2. En tal caso, el cero $x = 3$ de f se encuentra en el intervalo $(-1, 4)$ y determina dos subintervalos: $[-1, 3]$ y $[3, 4]$. Luego, el área será:

$$A = \int_{-1}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx + \left| \int_{3}^{4} (-x^2 + x + 6)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-1}^{3} \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{3}^{4} \right| = \frac{56}{3} + \frac{17}{6} = \frac{129}{6} \Rightarrow A = \frac{43}{2} u^2$$

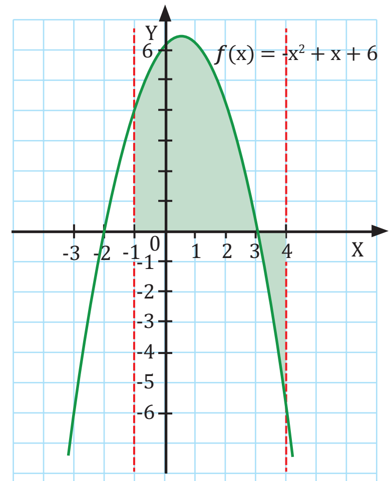


Fig. 16

Si observas la gráfica de f (fig. 16), puedes ver que efectivamente la función cambia de signo en $x = 3$ y que en el intervalo $[-1, 3]$ toma valores positivos, y en el intervalo $[3, 4]$ toma valores negativos.

En el caso de que nos pidan el área limitada por la gráfica de una función f y el eje de abscisas, sin especificar las rectas $x = a$ y $x = b$, hemos de entender que la región cuya área tenemos que calcular es la determinada por los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje x.

Ejemplo 21

Hallemos el área delimitado por la gráfica de $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$ y el eje OX.

1. Hallamos los ceros de f: $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x = -2, 0, 2$ y 3
2. Estos ceros determinan los intervalos siguientes: $[-2, 0]$, $[0, 2]$, $[2, 3]$. El área buscada será:

$$A = \left| \int_{-2}^{0} (x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} (x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x)\, dx \right| + \left| \int_{2}^{3} (x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2 \right]_{0}^{2} \right| + \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2 \right]_{2}^{3} \right| =$$

$$= \frac{244}{15} + \frac{116}{15} + \frac{113}{60} = \frac{1553}{60} \Rightarrow A = \frac{1553}{60} u^2$$

Ejemplo 22

Calculemos el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = x^2 - x - 6$ entre las abscisas -3 y 1.

Representamos gráficamente el recinto descrito (fig. 4) y vemos que, entre -3 y 1, la gráfica de f está por encima de la de g, es decir, $f(x) \geq g(x)$.

$$A = \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-3}^{1} (-x^2 - 4x + 5) - (x^2 - x - 6) dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} (-2x^2 - 3x + 11)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 11x \right]_{-3}^{1} = \frac{112}{3} \Rightarrow A = \frac{112}{3} u^2$$

10.2 Área limitada por dos funciones continuas y las rectas x = a y x = b

Observa la sección sombreada de la figura 17. Está limitado por las gráficas de dos funciones continuas, f y g, que cumplen $f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall\, x \in [a,b]$, y por las rectas $x = a$ y $x = b$.

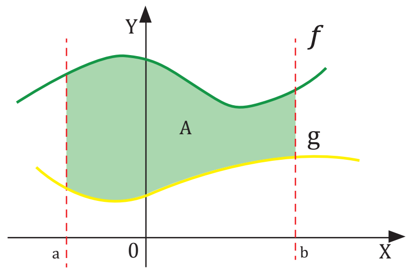


Fig. 17

Tal y como puedes ver, el área A de esta sección es:

$$A = A_f - A_g$$

donde A_f es el área de la sección limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$; y A_g es el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

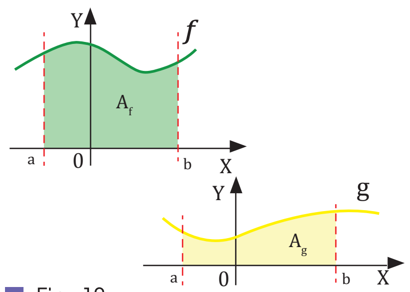


Fig. 18

Consideremos el caso general, en que f y g cumplen que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, aunque no sean necesariamente positivas (ver fig. 19).

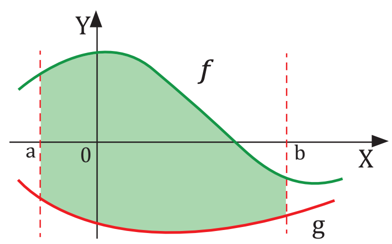


Fig. 19

En este caso se cumple:

- Existe una constante k bastante grande como para que $g + k$ sea positiva en el intervalo $[a, b]$, como en el gráfico.
- El área A, limitada por las gráficas de f y g entre a y b, es la misma que el área B, limitada por las gráficas de $f + k$ y $g + k$ entre las mismas abscisas.

Pero observa que $f + k \geq g + k \geq 0$, por lo que estamos en el caso anterior; por tanto:

$$A = B = \int_a^b [(f(x) + k) - (g(x) + k)]dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Así, podemos afirmar que, dadas dos funciones f y g, tales que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el área del recinto limitado por sus gráficas entre $x = a$ y $x = b$ (ver fig. 4) es:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

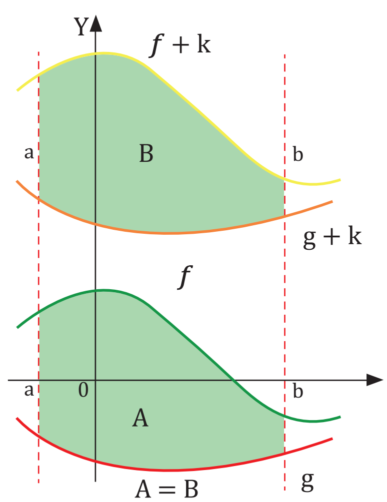


Fig. 20

En caso de que nos pidan el área limitada por las gráficas de dos funciones, sin especificar las rectas $x = a$ y $x = b$, entenderemos que la región cuya área hemos de calcular es la definida por los puntos de corte de las dos gráficas.

Ejemplo 23

Hallemos el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$.

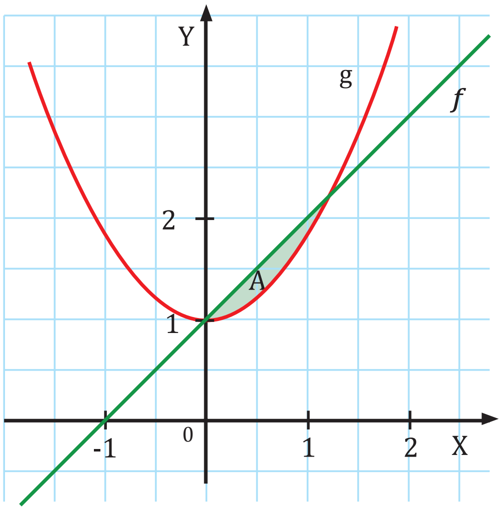
Representamos gráficamente el recinto y vemos que, entre 0 y 1, la gráfica de f está por encima de la de g, es decir, $f(x) \geq g(x)$.

Por tanto, aplicando el resultado anterior:

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx$$

$$= \int_0^1 ((x + 1) - (x^2 + 1))\, dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \Rightarrow A = \frac{1}{6} u^2$$



Si f no es siempre más grande que g en el intervalo $[a, b]$, procederemos como en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 24

Calculemos el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 5x - 9$ y $g(x) = 3x^3 - 21x^2 + 47x - 33$.

Representamos gráficamente el área descrita y vemos que $g(x) \geq f(x)$ en $[1, 2]$ y $f(x) \geq g(x)$ en $[2, 4]$.

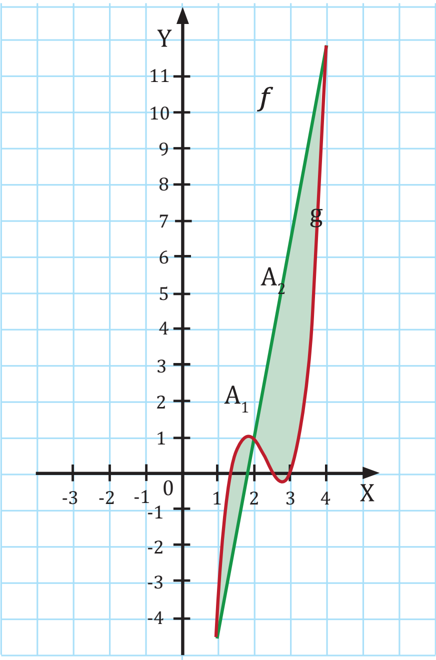
Como en cada uno de estos subintervalos una de las dos funciones es siempre más grande que la otra, podemos calcular el área en cada uno mediante el procedimiento que se ha descrito anteriormente:

$$A_1 = \int_1^2 (g(x) - f(x))\, dx = \int_1^2 ((3x^3 - 21x^2 + 47x - 33) - (5x - 9))\, dx =$$

$$= \int_1^2 (3x^3 - 21x^2 + 42x - 24)dx = \left[\frac{3x^4}{4} - 7x^3 + 21x^2 - 24x \right]_1^2 = \frac{5}{4}$$

$$A_2 = \int_2^4 (f(x) - g(x))\, dx = \int_2^4 ((5x - 9) - (3x^3 - 21x^2 + 47x - 33))dx =$$

$$= \int_2^4 (-3x^3 + 21x^2 - 42x + 24)dx = \left[-\frac{3x^4}{4} + 7x^3 - 21x^2 + 24x \right]_2^4 = 8$$



Por tanto:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{4} + 8 = \frac{37}{4} \Rightarrow A = \frac{37}{4} u^2$$

10.3 Aplicaciones en física

A continuación, veremos cómo la integral definida aparece también en algunos conceptos elementales de la física

	Variación del espacio recorrido	Ejemplo
Cinemática	El espacio recorrido entre los instantes t_1 y t_2 por un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con velocidad v es: $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ ya que la función posición, x, es una primitiva de v.	Un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con velocidad $v(t) = (4t + 3)m \cdot s^{-1}$. Halla el espacio recorrido entre los 5 s y los 10 s. Basta con aplicar la fórmula correspondiente: $x(10) - x(5) = \int_5^{10} (4t + 3)dt = \left[(2t^2 + 3t)\right]_5^{10} = 230 - 65 = 165$ Por tanto, el espacio recorrido por ese móvil entre los 5 s y los 10 s es de 165 m.
	Variación de velocidad	**Ejemplo**
Cinemática	El incremento de velocidad entre los instantes t_1 y t_2 experimentado por un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con aceleración a es: $v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$ ya que la función velocidad, v, es una primitiva de a.	Un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con aceleración $a(t) = \sqrt{t}\ m{\cdot}s^{-2}$. Halla el incremento de velocidad experimentado entre los 4 *s* y los 9 *s*. Aplicamos la fórmula correspondiente: $v(9) - v(4) = \int_4^9 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2t\sqrt{t}}{3}\right]_4^9 = 18 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}$ Así, el incremento de velocidad entre los 4 s y los 9 s es $38/3\ ms^{-1}$.
	Trabajo	**Ejemplo**
Dinámica	El trabajo realizado por una fuerza F, que actúa en la dirección del movimiento, al desplazar un cuerpo desde un punto x = a hasta otro punto x = b es: $W = \int_a^b F(x)\,dt$	¿Cuál es el trabajo realizado al comprimir un muelle 2 cm si aplicamos una fuerza $F(x) = 5x$ N en la misma dirección del desplazamiento? Expresamos el desplazamiento en metros, 2 cm = 0,02 m, para trabajar con unidades del SI; y aplicamos la expresión del trabajo de una fuerza variable: $W = \int_0^{0,02} 5\,x\,dx = 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,02} = 5(0,0002 - 0) = 0,001$ Por tanto, el trabajo realizado es 0,001 J.

Tabla 9



http://goo.gl/AhbDjb



http://goo.gl/cJeRlc

Teoremas de derivadas			
Funciones simples		Funciones compuestas	
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	Para simplificar la notación, u denotará una función de x.	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$	$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu^{n-1} \cdot u'$ $n \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$	$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[n]{u}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln u$	$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$f(x) = \log_a u$	$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot u'$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^u$	$f'(x) = e^u \cdot u'$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \text{Ina}$	$f(x) = a^u$	$f'(x) = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \text{sen } u$	$f'(x) = \cos u \cdot u'$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{ sen } x$	$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -\text{ sen } u \cdot u'$
$f(x) = \text{tg } x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$f(x) = \text{tg } u$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = \sec^2 u \cdot u'$
$f(x) = \text{cotg } x$	$f'(x) = \frac{-1}{\text{sen}^2 x} = -\csc^2 x$	$f(x) = \text{cotg } u$	$f'(x) = \frac{-1}{\text{sen}^2 u} \cdot u' = -\text{ cosec}^2 u \cdot u'$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \text{tg } x \cdot \sec x$	$f(x) = \sec u$	$f'(x) = \text{tg } u \cdot \sec u \cdot u'$
$f(x) = \text{cosec } x$	$f'(x) = -\text{ cotg } x \cdot \text{cosec } x$	$f(x) = \text{cosec } u$	$f'(x) = -\text{ cotg } u \cdot \text{cosec } u \cdot u'$
$f(x) = \text{arc sen } x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \text{arc sen } u$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$f(x) = \text{arc cos } x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \text{arc cos } u$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$f(x) = \text{arc tg } x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \text{arc tg } u$	$f'(x) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$f(x) = \text{arc cotg } x$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$	$f(x) = \text{arc cotg } u$	$f'(x) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$

Libro Edebe, Matemática 2 mod. Ciencia y Tecnología, pag 245

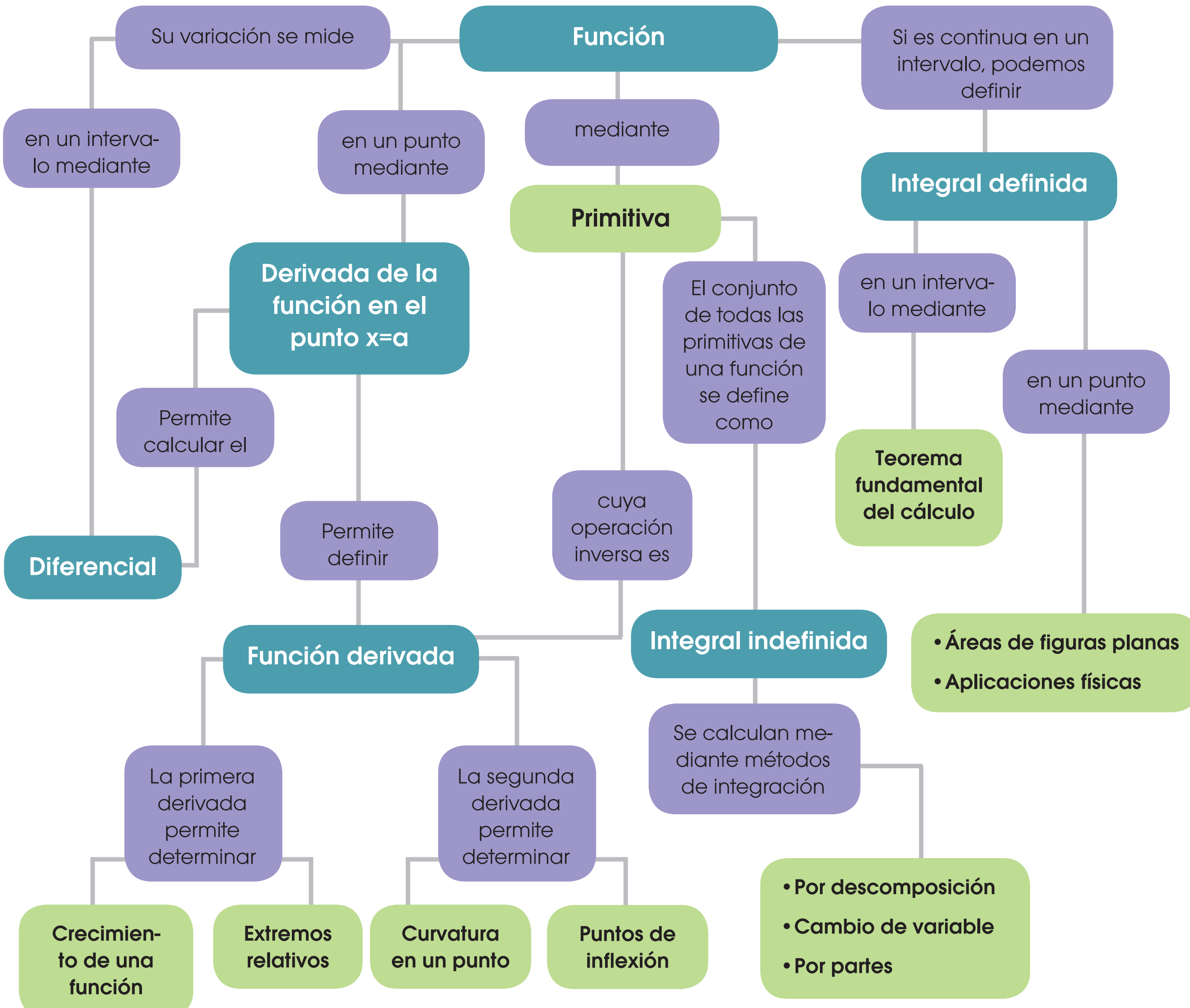
Tabla 10

Teorema de integrales	
Funciones simples	Funciones compuestas
$\int 0 \ dx = C$	Para simplificar la notación, u denotará una función de x ($u = g(x)$; $u' = g'(x)$).
$\int 1dx = x + C$	
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1, n \in \mathbb{R}$	$\int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{u} u' \, dx = \ln \lvert u \rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u \cdot u' \, dx = e^u + C$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \forall a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$	$\int a^u \cdot u' \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \forall a \in \mathbb{R}^+$
$\int \operatorname{sen} x \, dx = - \cos x + C$	$\int \operatorname{sen} u \cdot u' \, dx = - \cos u + C$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos u \cdot u' \, dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} u' \, dx = \int \sec^2 u \cdot u' \, dx = \operatorname{tg} u + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = - \operatorname{cotg} x + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} u' \, dx = \int \operatorname{cosec}^2 u \cdot u' \, dx = - \operatorname{cotg} u + C$
$\int \operatorname{tg} x \sec x \, dx = \sec x + C$	$\int \operatorname{tg} u \sec u \cdot u' \, dx = \sec u + C$
$\int \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x \, dx = - \operatorname{cosec} x + C$	$\int \operatorname{cotg} u \operatorname{cosec} u \cdot u' \, dx = -\operatorname{cosec} u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$ $= - \operatorname{arc\,cos} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u' \, dx = \operatorname{arc\,sen} u + C$ $= -\operatorname{arc\,cos} u + C$
$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$ $= -\operatorname{arc\,cotg} x + C$	$\int \frac{1}{1 + u^2} u' \, dx = \operatorname{arc\,tg} u + C$ $= -\operatorname{arc\,cotg} u + C$

Libro Edebe, Matemática 2 mod. Ciencia y Tecnología, pag 303

Tabla 11

2 Resumen


Función
Su variación se mide
en un interva-lo mediante
en un punto mediante
Diferencial
Permite calcular el
Derivada de la función en el punto x=a
Permite definir
Función derivada
La primera derivada permite determinar
Crecimien-to de una función
Extremos relativos
La segunda derivada permite determinar
Curvatura en un punto
Puntos de inflexión
mediante
Primitiva
cuya operación inversa es
El conjunto de todas las primitivas de una función se define como
Integral indefinida
Se calculan me-diante métodos de integración
• Por descomposición
• Cambio de variable
• Por partes
Si es continua en un intervalo, podemos definir
Integral definida
en un interva-lo mediante
Teorema fundamental del cálculo
en un punto mediante
• Áreas de figuras planas
• Aplicaciones físicas

Problemas resueltos

A

1. Una partícula se mueve en línea recta por el eje x. Su velocidad está dada por la función:

   $v(t) = t^3 - 11t^2 + 34t - 24$ m/s

   a. **Encuentra** la aceleración de la partícula después de 4 segundos.
   b. ¿Cuándo cambia de dirección la partícula?
   c. **Encuentra** la distancia que la partícula recorrió durante los primeros 10 segundos.
   d. Si $x(0) = -10$ m, **encuentra** la posición de la partícula a los 10 segundos.

Solución

a. Sabemos que la aceleración es la derivada de la velocidad, por lo que:

$v(t) = t^3 - 11t^2 + 34t - 24$

$a(t) = v'(t) = 3t^2 - 22t + 34$

Resolviendo para la aceleración en el tiempo $t = 4$ seg:
$a(4) = 3(16) - 22(4) + 34 = 2$ m/s²

b. La partícula cambia de dirección cuando la velocidad cambia de signo, puesto que $x'(t) = v(x)$; entonces debemos resolver la ecuación:

$$t^3 - 11t^2 + 34t - 24 = 0$$

Pero esto es igual a:

$$(t-1)(t-4)(t-6) = 0$$

Esto nos indica que la velocidad es 0 en $t = 1$, $t = 4$ y $t = 6$. Realizando tablas de valores para $v(t)$ obtenemos los siguientes resultados:

-	+	-	+
(0, 1)	(1, 4)	(4, 6)	(6, ∞)

Por lo tanto, la partícula cambia de dirección en $t = 1$, $t = 4$ y $t = 6$.

c. Como vimos en la sección de *Aplicaciones en Física*, la distancia recorrida por la partícula entre el tiempo $t = 0$ y $t = 10$ está dada por:

$$\int_0^{10} v(t)\,dt = \int_0^{10} (t^3 - 11t^2 + 34t - 24)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{11}{3}t^3 + 17t^2 - 24t\right]_0^{10}$$

$$= 2500 - 3666{,}67 + 1700 - 240 = 293{,}33 \text{ m}$$

d. Primero encontramos la función $x(t)$:

$$x(t) = \int v(t) = \int t^3 - 11t^2 + 34t - 24dt$$

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{11}{3}t^3 + 17t^2 - 24t + C$$

Sabiendo que $x(0) = -10$ m:

$$x(0) = \frac{1}{4}(0) - \frac{11}{3}(0) + 17(0) - 24(0) + C = -10$$

$\Rightarrow C = -10$

Por lo tanto:

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{11}{3}t^3 + 17t^2 - 24t + C$$

Finalmente:

$$x(10) = \frac{1}{4}(10^4) - \frac{11}{3}(10^3) + 17(10^2) - 24(10) - 10$$

$$= 283{,}33$$

Ejercicios y problemas

1 Derivadas

1. **Calcula**, aplicando la definición, la derivada en $x = 2$ de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = 3x^2 - 1$ b. $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

2. **Halla** el valor de la derivada de $f(x)= \sqrt{1+x^2}$ en $x = 0$ y **explica** los pasos efectuados.

3. La función que describe la posición de un móvil, que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea, en función del tiempo es $x(t) = 3t^3 - 6t^2$, donde x se mide en metros y t, en segundos.

   Calcula:

   a. La velocidad y la aceleración en función del tiempo.

   b. La posición, la velocidad y la aceleración para $t = 3$ s.

   c. El instante en que su velocidad es 12 ms^{-1}.

   d. El instante en que la aceleración es 8 ms^{-2}.

4. **Halla** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos que se indican

   a. $f(x) = \ln x$ en $x = e$

   b. $f(x) = e^x$ en $x = 2$

   c. $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

5. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 10x - 24}$, **calcula** la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

6. **Halla** en qué puntos de la curva:

   $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 5$, la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

7. Dada la función $f(x) = mx^3 + 2x^2 + 3x - 1$, ¿cuál debe ser el valor de m para que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ sea 11?

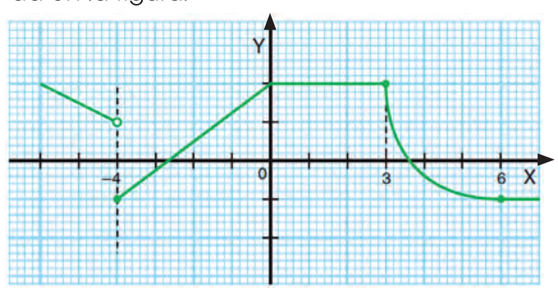
8. **Define** derivada y derivadas laterales de una función en un punto.

   —**Comprueba** que la función:

   $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1+x}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

   es derivable en $x = 1$.

9. **Estudia** la derivabilidad de la función representada en la figura.



10. **Utiliza** las reglas de derivación para calcular la derivada de las funciones siguientes:

    a. $f(x) = x^4 \ln x$

    b. $f(x) = x \ln x - x$

    c. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

    d. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

11. La función f es dos veces diferenciable y satisface las condiciones de la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	3	1
3	0	2	4

Sean $g(x) = 4\cos(3x) + f(x)$ y $h(x)=e^{5f(x)}$

Halla.

a. $g(0)$

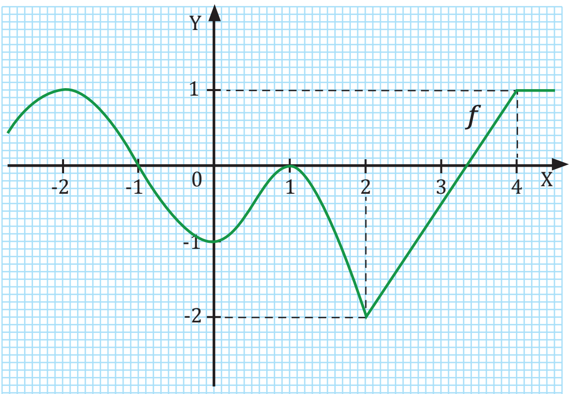
b. $g'(0)$

c. $h'(3)$

d. $h''(3)$

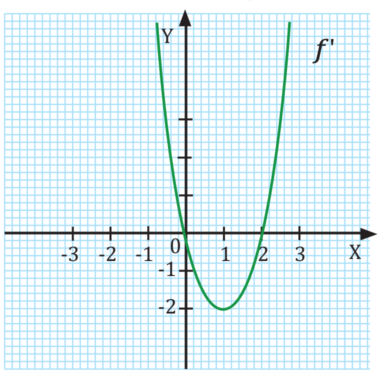
2 Aplicaciones de la derivada

12. **Representa** de forma aproximada la gráfica de la función f', sabiendo que la gráfica de f es la de la figura.



13. La figura muestra la gráfica de una función polinómica de segundo grado que pasa por el origen y que es la derivada de una función f.

Resuelve los apartados siguientes:



a. **Determina** los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b. **Determina** los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de f.

c. **Traza** un esbozo de la gráfica de f. **Justifícalo**.

14. Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 \$/m y la de los otros tres lados, 0,625 \$/m. **Halla** el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1 800 \$.

3 Integrales

15. **Calcula**:

a. $\int 2x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ b. $\int x^2 \ln x \, dx$

16. **Calcula** las integrales siguientes:

a. $\int (x^4 - 3x)^5 (4x^3 - 3) \, dx$

b. $\int \operatorname{cotg} x \, dx$

c. $\int \dfrac{x^3 + 2}{(x^4 + 8x + 1)^2} \, dx$

d. $\int \dfrac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

e. $\int x^2 e^{x^3} \, dx$

f. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$

g. $\int \dfrac{x^2}{x^3 + 2} \, dx$

h. $\int \dfrac{2^x}{5^x} \, dx$

—Ten en cuenta que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

17. **Halla** el área limitada por la gráfica de $f(x) = \cos x$ y el eje x entre las abscisas $\dfrac{\pi}{2}$ y π

18. **Halla** el área limitada por $f(x) = x^2 - 2x - 15$, el eje 0X y las rectas $x = -4$ y $x = 7$.

19. **Halla** el área limitada por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ y el eje horizontal entre las abscisas -5 y $\dfrac{3}{2}$.

20. **Halla** el área limitada por $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ y el eje 0X.

21. Si un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con una aceleración $a(t) = t - 1$, en unidades del SI:

a. **Halla** el incremento de velocidad experimentado entre los 2 s y los 5 s.

b. **Halla** el espacio recorrido entre los 3 s y los 7 s si $v(0) = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



http://goo.gl/bqfpGC

22. Dada la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$, **calcula**:

a. La primitiva cuya gráfica pasa por $A = (1, 1)$.

b. La primitiva que se anula para $x = -1$.

23. Dada la función $f(x) = \ln x$, **calcula**:

a. La primitiva cuya gráfica pasa por $A = (1, 3)$.

b. La primitiva que se anula para $x = e$.

24. **Calcula**, reconociendo en el integrando la estructura $f(g(x))\, g'(x)$, las integrales siguientes:

a. $\int \frac{\text{arc tg}^4\, x}{1 + x^2}\, dx$

b. $\int \frac{x^7}{1 + x^8}\, dx$

c. $\int \frac{x^3}{1 + x^8}\, dx$

d. $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \text{sen } 2x}}\, dx$

e. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}\, dx$

f. $\int \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}\, dx$

25. **Calcula** las integrales del ejercicio anterior, utilizando ahora los cambios de variable que se indican.

a. $\text{arc tg}\, x = t$

b. $1 + x^8 = t$

c. $x^4 = t$

d. $1 + \text{sen } 2x = t$

e. $e^{2x} = t$

f. $1 + e^{3x} = t$

Compara los dos procedimientos en cada caso.

26. **Utiliza** el método de integración por partes para calcular las siguientes integrales:

a. $\int x \text{ sen } x\, dx$

b. $\int x^5 \ln x\, dx$

c. $\int \ln x\, dx$

d. $\int e^x \text{ sen } x\, dx$

e. $\int 3\, x\, e^x\, dx$

f. $\int x^2 \cos x\, dx$

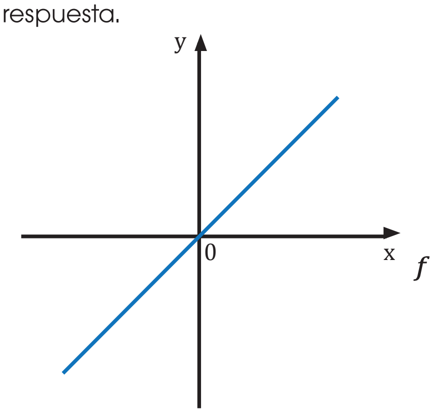
Instrucción: primero, considera que $dv = dx$. Luego, al aplicar sucesivamente este método, aparecerá en el segundo término de la igualdad una integral igual que la inicial; agrúpalas, aísla los términos y así obtendrás la solución.

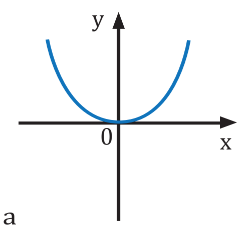
27. **Calcula** las siguientes integrales:

a. $\int \frac{3x - 1}{x^2 - 3x - 4}\, dx$

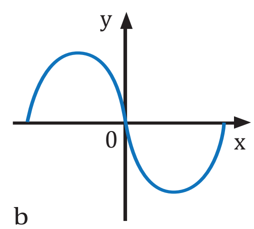
b. $\int \frac{4x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}\, dx$

28. La figura muestra la gráfica de una función f. ¿Cuál de las funciones que se representan a continuación es una primitiva de la función f? **Justifica** la respuesta.

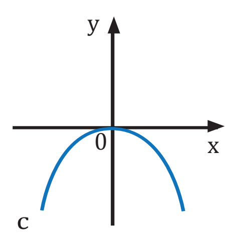




a



b



c

29. **Utiliza** la regla de Barrow para calcular:

a. $\int_0^3 (3x^2 - 6)\, dx$

b. $\int_0^1 \frac{5}{7 + 7x^2}\, dx$

c. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \text{ sen}^5 x\, dx$

d. $\int_1^e x^{-1}\, dx$

e. $\int_2^3 \frac{1}{x \ln x}\, dx$

f. $\int_2^5 x\, e^x\, dx$

30. **Halla** el área de la región limitada por $f(x) = -e^x$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

31. **Calcula** el área del recinto limitado por $f(x) = \ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x = e$ y $x = e^2$.

32. **Determina** el área limitada por $f(x) = \cos x$ y el eje OX entre las abscisas 0 y 2π.

—**Calcula** $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$ ¿Coincide este resultado con el valor del área calculada?.

33. Las rectas $y = 3x$ e $y = -x + 8$, junto con el eje de abscisas, determinan un triángulo. **Halla** su área utilizando el cálculo integral y **comprueba** que se obtiene el mismo resultado por un procedimiento geométrico.

34. **Halla** el área de la región comprendida entre las funciones $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$.

35. **Calcula** el área de la región del plano limitada por la gráfica de la parábola $y = x^2 - x$ y por la de la función:

$$f(x)=\frac{x - x^2}{(x+1)(x+2)}$$

36. Un cuerpo se desplaza con una aceleración que viene dada por la función $a(t) = 5 + 3t$ [$m \cdot s^{-2}$]. **Halla** el incremento de velocidad experimentado entre los 3 y los 5 segundos, y el espacio recorrido en ese tiempo sabiendo que el cuerpo partía del reposo.

37. **Calcula** el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2$, el eje OX y la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa 3.

38. **Calcula** la integral $\int_a^b x\sqrt{9 - x^2} \, dx$, y **explica** su significado geométrico. **Haz** un dibujo aproximado del recinto correspondiente.

39. **Determina** el valor de a para el que la integral $\int_0^a x(x - 3)^2 \, dx$ represente el área del recinto limitado por una curva plana y el eje OX.

—**Proponga** una ecuación de esta curva y **calcula** el área del recinto.

40. **Halla** el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x)= 4x - x^2$ y $g(x)= x$ entre las abscisas 1 y 2.

41. Consideremos las funciones siguientes:

$$F(x)= \int_0^x (t \operatorname{sen} t) dt \qquad G(x)= \int_0^{e^{x^2}} e^{-t^2} dt$$

a. **Halla** los extremos de la función F en el intervalo $[1, 2\pi]$.

b. **Determina** los puntos en que se anula la función G'.

42. El crecimiento poblacional de un país en función del tiempo sigue, aproximadamente, esta expresión:

$$p(t)= \frac{0{,}8\, e^{\frac{-t}{100}}}{(4e^{\frac{-t}{100}} + 1)^2}$$

Sabiendo que la población actual del país $(t = 0)$ es de 4 millones de habitantes, **utiliza** el cambio de variable:

$$4e^{\frac{-t}{100}} + 1 = x$$

para hallar la función P que rige la población de este país.

—¿Cuál sería la función P si la población actual fuese de 5,5 millones de habitantes?

43. La evolución de la población de un país, en millones de habitantes, entre los años 2000 y 2009 viene dada por la expresión siguiente:

$$p\,(t) = 38\, e^{-0{,}02\,t}$$

donde t es el tiempo en años transcurridos desde 2000.

a. **Halla** la integral indefinida P de la función p.

b. La población en este período, ¿ha aumentado o ha disminuido?

c. **Calcula** la población media del país en el período considerado.

Para finalizar

1. Aplicando la definiión, **deriva** cada una de las siguientes funciones en el punto indicado:

   a. $f(x)= \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$ en $x = 2$

   b. $g(x)= \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x = -3$

   c. $h(x)= \dfrac{x^2 - 1}{e^x}$ en $x = 0$

   d. $i(x)= \dfrac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$ en $x = 0$

   e. $j(x)= \sqrt{(2x^3 + 11)^2}$ en $x = 2$

2. **Determine** la derivada segunda de las siguientes funciones:

   a. $f(x)= \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{2x^2}{4} + x + 5$

   b. $g(x)= (2x^2 + 5)^3$

   c. $h(x)= \dfrac{5x^2 + 1}{x}$

   d. $i(x)= \sqrt{x + 3}$

   e. $j(x)= 5 \text{ sen } t^2$

   f. $k(x)= 3\, x \ln(x+2)$

3. **Calcula** las integrales siguientes mediante un cambio de variable adecuado

   a. $\displaystyle\int \frac{2^x}{1 + 2^x}\, dx$

   b. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$

4. Nicole va en bicicleta en línea recta hasta el parque, partiendo de su casa en el tiempo $t = 0$ minutos, y llega al parque en $t = 12$ minutos. La velocidad con la que viajó está modelada por la función a trozos de la gráfica.

   a. **Encuentra** la aceleración de Nicole en el tiempo $t = 5{,}5$

   b. **Explica** el significado de $\int_0^{12} v(t)\, dt$ en términos del viaje de Nicole. **Encuentra** el valor de $\int_0^{12} v(t)\, dt$

   c. En medio camino, Nicole se da cuenta de que dejó caer su abrigo. ¿En qué momento se dio la vuelta para buscarlo? **Razona** tu respuesta.

   d. Esteban sale en su bicicleta al mismo tiempo hacia el parque para encontrarse con Nicole, y llega un minuto antes.

   Su velocidad es modelada por la función

$$w(t) = \frac{\pi}{15} \text{ sen } \left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

¿Quién vive más cerca del parque?

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

El puente matemático

El puente de la imagen es conocido como el puente matemático debido a su forma, que consiste en un arco de circunferencia del que parten rectas tangentes. Está ubicado en Cambridge, Inglaterra.
Su estructura se sustenta casi enteramente en las vigas tangentes, y demuestran un uso práctico simple de las matemáticas en la ingeniería, obteniendo un puente resistente y eficiente.



http://goo.gl/B8zPV1

SENTIDO CRÍTICO

Elasticidad de la demanda

Sabemos que la demanda, D, es función del precio, p, y que, en general, a un mayor precio corresponde una demanda menor. La elasticidad de la demanda es una función $E(p)$ que expresa la variación relativa de la demanda respecto del precio, es decir, nos dice si la demanda reacciona ante un aumento de precios con un incremento considerable o no. Su signo acostumbra a ser negativo, ya que precio y demanda varían en sentidos opuestos.
Dada $D(p)$, la función de la demanda respecto del precio, y si la variación del precio es suficientemente pequeña, puede demostrarse que la elasticidad vale aproximadamente

$$E'(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}$$

Según el valor de $E(p)$, las curvas de demanda pueden presentar pendiente negativa mayor, menor o igual a -1, lo que nos permite distinguir:

- $E(p)=-1$, el precio se modifica proporcionalmente a la demanda (demanda de elasticidad unitaria).
- $E(p)<-1$, la demanda varía relativamente menos que el precio (demanda inelástica).
- $E(p)>-1$, la demanda varía relativamente más que el precio (demanda elástica).

SI YO FUERA....



http://goo.gl/lugGbl

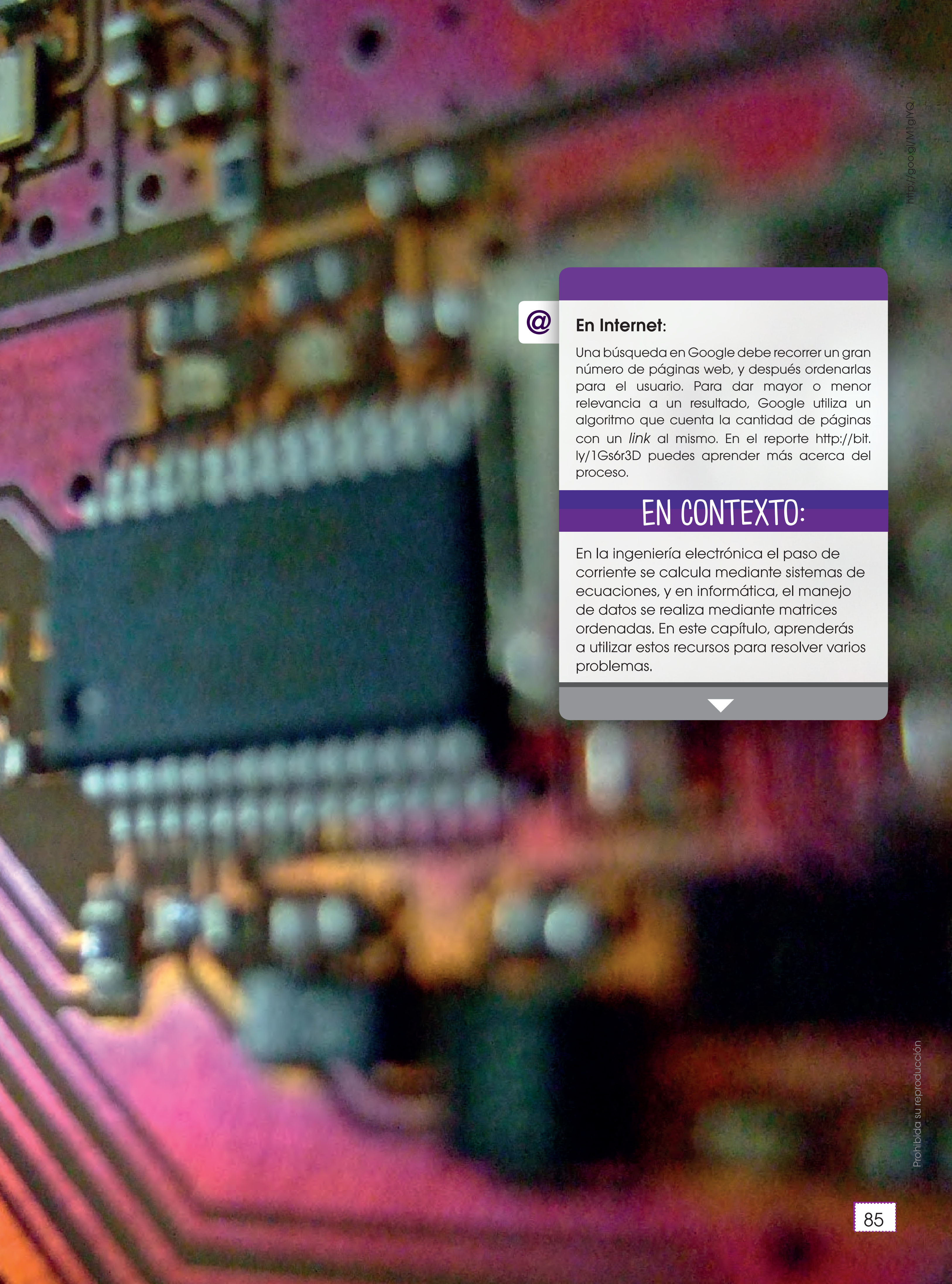
Economista

Las derivadas e integrales son de gran importancia en el campo de la economía. Uno de los modelos fundamentales de la economía es la ley de oferta y demanda de un producto.
En este modelo la cantidad que producimos y que vendemos se describe por las curvas de oferta y de demanda. Cuanto mayor es el precio, mayor es la oferta y menor es la demanda. El punto de intersección de las curvas que modelan estos fenómenos se denomina punto de equilibrio.
Mediante el uso de integrales sobre las ecuaciones de oferta y demanda, podemos calcular el superávit del productor vendiendo al precio de equilibrio y no a un precio menor, y la ganancia del consumidor pagando el precio de equilibrio a diferencia de un precio mayor.



3 Álgebra lineal

CONTENIDOS:



http://goo.gl/M1glYQ

En Internet:

Una búsqueda en Google debe recorrer un gran número de páginas web, y después ordenarlas para el usuario. Para dar mayor o menor relevancia a un resultado, Google utiliza un algoritmo que cuenta la cantidad de páginas con un *link* al mismo. En el reporte http://bit.ly/1Gs6r3D puedes aprender más acerca del proceso.

EN CONTEXTO:

En la ingeniería electrónica el paso de corriente se calcula mediante sistemas de ecuaciones, y en informática, el manejo de datos se realiza mediante matrices ordenadas. En este capítulo, aprenderás a utilizar estos recursos para resolver varios problemas.

1. MATRICES NUMÉRICAS

1.1. Concepto

Observa el siguiente rectángulo de números.

Columna 1 Columna 2 Columna 3

$$\begin{matrix} \text{Fila 1} \rightarrow \\ \text{Fila 2} \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Consta de seis números dispuestos en dos filas y tres columnas. Decimos que es una matriz de dimensión 2×3.

> Llamamos matriz de dimensiones $m \times n$ a un arreglo rectangular de números reales, dispuestos en m filas y n columnas

Podemos referirnos fácilmente a un elemento determinado dando la fila y la columna en que se encuentra.

Así, por ejemplo, el número 2 es el elemento que ocupa la fila 1, columna 1; el número -3 es el que ocupa la fila 2, columna 3.

1.2. Representación

Representamos una matriz mediante una letra mayúscula (A,B,C...); y sus elementos, mediante la misma letra pero minúscula (a,b,c...), con un doble subíndice que indica la fila y la columna a las que pertenece cada uno de ellos. Así, en general, para representar una matriz A, de dimensión $m \times n$, escribimos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.3. Igualdad

Dos matrices, A y B, son iguales cuando contienen los mismos elementos, dispuestos en los mismos lugares.

$$A = B \text{ si } a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i \text{ y } j$$

Lógicamente, para que dos matrices sean iguales, es necesario que tengan la misma dimensión.

1.4. Tipos de matrices

Algunas matrices reciben nombres especiales de acuerdo con su dimensión o sus elementos.

	Tipo de matriz	Ejemplo
Según su dimensión	**Matriz cuadrada** El número de filas coincide con el de columnas (dimensión $n \times n$). Se habla de matriz cuadrada de orden n. Los elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ forman la diagonal principal.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz cuadrada de orden 3 Los elementos 2, 2 y 6 forman la diagonal principal.
	Matriz fila Solo tiene una fila (dimensión $1 \times n$). También se le llama vector fila.	$(\,2\ 1\ 0\,)$ Matriz fila 1×3
	Matriz columna Sólo tiene una columna (dimensión $m \times 1$). También se le llama vector columna.	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ Matriz columna 3×1
Según su dimensión	**Matriz triangular (superior o inferior)** Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo o situados por encima de la diagonal principal son 0.	$a_{ij} = 0, i > j$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz triangular superior $a_{ij} = 0, i < j$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz triangular inferior
	Matriz diagonal Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son 0.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
	Matriz identidad Matriz diagonal en la que todos los elementos situados en la diagonal principal son 1. Se simboliza por la letra I.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Matriz nula Todos sus elementos son 0.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tabla 1.

2. OPERACIONES CON MATRICES

Vamos a estudiar diversas operaciones que pueden efectuarse con matrices.

2.1. Adición de matrices

Dadas dos matrices, A y B, de la misma dimensión, $m \times n$, la matriz suma, $A + B$, es la que obtenemos sumando los elementos que en cada una de ellas ocupan la misma posición:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\forall\, A, B \in M \Rightarrow A + B = C$$

$$A, B \in M$$

Ejemplo 1

Calcula $A + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Operamos de acuerdo con la definición:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 4+4 \\ 0+4 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la adición de matrices	
Asociativa	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Elemento neutro $0 = (0)$	$A + 0 = 0 + A = A$
Elemento opuesto $-A = (-a_{ij})$	$A + (-A) = (-A) + A = 0$
Conmutativa	$A + B = B + A$

Tabla 2.

La existencia de elemento opuesto nos permiten definir la matriz diferencia, $A - B$. Es la que obtenemos al sumar A y $-B$:

$$A - B = A + (-B)$$

De forma abreviada:

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij}) + (-b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

De este modo, si A y B son las matrices del ejemplo anterior, tenemos:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 4-4 \\ 0-4 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. Multiplicación de una matriz por un número real

Dados una matriz A de dimensión $m \times n$, y un número real k, la matriz producto por un número real, kA, es la que obtenemos al multiplicar cada elemento de la matriz por ese número:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada:

$$k(a_{ij}) = (ka_{iij}), \forall_i \forall_j$$

Ejemplo 2

Calcula $2A$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Operamos de acuerdo con la definición:

$$2A = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot(-3) & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de una matriz por un número real	
P1	$k(A + B) = kA + kB, \forall k \in \mathbb{R}, A, B \in M$
P2	$(k + h)A = kA + hA$
P3	$k(hA) = (kh)A$
P4	$1A = A1 = A, 1 \in \mathbb{R} \wedge A \in M$

Tabla 3.

2.3. Multiplicación de matrices

A continuación, estudiaremos la multiplicación de matrices. Definiremos primero esta operación en un caso particular muy simple y, después, extenderemos la definición a un caso general.

Sean una matriz fila F de dimensión $1 \times n$ y una matriz columna C de dimensión $n \times 1$:

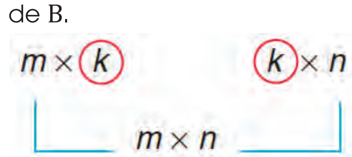
$$F = (F_1 \cdots F_n) \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Llamamos producto de F por C, y lo simbolizamos $F \cdot C$, a:

$$F \cdot C = (F_1 \cdots F_n) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = f_1 c_1 + \cdots + f_n c_n$$

Y TAMBIÉN: ¿?

El producto $A \cdot B$ de dos matrices solo está definido si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.



La matriz producto es de dimensión $m \times n$.

Y TAMBIÉN: ¿?

Dada una matriz A de dimensión m x n, la matriz transpuesta, A^T, es la que se obtiene intercambiando sus filas por columnas

Ejemplo 3

Consideremos las matrices $A = (2\ 3) + B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Calculemos el producto $A \cdot B$.

Operamos de acuerdo con la definición:

$A \cdot B = (2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -7$

Supongamos ahora una matriz A de dimensión $m \times k$, a cuyas filas llamaremos $F_1, F_2, \dots, F_m$, y una matriz B de dimensión $k \times n$, a cuyas columnas llamaremos $C_1, C_2, \dots, C_n$.

La matriz producto $A \cdot B$ es la que obtenemos de la siguiente forma:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & \cdots & F_1 \cdot C_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_m \cdot C_1 & \cdots & F_m \cdot C_n \end{pmatrix}$$

Observa que el elemento de esta matriz que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima es el que obtenemos al multiplicar la fila F_i por la columna C_j.

Propiedades de la multiplicación de matrices	
Asociativa	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Distributiva por la izquierda de la multiplicación respecto a la adición	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Distributiva por la derecha de la multiplicación respecto a la adición	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
No conmutatividad	$A \cdot B \neq B \cdot A$

Tabla 4.

3. MATRIZ IDENTIDAD

En el caso de matrices cuadradas de orden n, la multiplicación cumple una propiedad adicional. Existe un elemento neutro que llamamos matriz identidad y que simbolizamos por I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, para cualquier matriz cuadrada de orden n:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Actividades

1. **Considera** las matrices siguientes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a. $A = M + N - (2M - 3N)$ b. $B = M \cdot N - (M + I) \cdot (N - I)$

4. MATRIZ INVERSA

Al estudiar la multiplicación de matrices hemos visto que, si nos limitamos a considerar las matrices cuadradas de orden n, existe un elemento neutro que simbolizamos por I.

Nos planteamos ahora si, dada una matriz cuadrada A, existe otra matriz cuadrada B que cumpla:

$$A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} = I$$

Si B existe, diremos que es la matriz inversa de A. La representamos por A^{-1}.

Propiedades de la inversa para toda matriz invertible
$(A^{-1})^{-1} = A$
$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Tabla 5.

4.1 Cálculo de la matriz inversa a partir de la definición

Veamos, mediante un ejemplo, cómo calcular la inversa de una matriz A, si existe, a partir de la definición.

Ejemplo 4

Hallemos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Debemos hallar una matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto indicado en el primer miembro de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a + 3c & b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la condición de igualdad de matrices, obtenemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} 2a - c = 1 \\ a + 3c = 0 \end{matrix}\right\} \quad y \quad \left.\begin{matrix} 2b - d = 0 \\ b + 3d = 1 \end{matrix}\right\}$$

cuyas soluciones son:

$$a = \frac{3}{7} \qquad b = \frac{1}{7} \qquad c = -\frac{1}{7} \qquad d = \frac{2}{7}$$

Luego, la matriz inversa será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Existe una serie de operaciones que podemos efectuar con las filas de una matriz y que permiten convertirla en una matriz triangular: las transformaciones elementales.

En general, si llamamos F_i a la fila i-ésima y F_j a la fila j-ésima, las transformaciones elementales son las que se recogen en la tabla:

Transformaciones elementales	Ejemplo
Intercambiar dos filas. Lo denotamos por $F_i \leftrightarrow F_j$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \Leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
Sumar a una fila los elementos correspondientes de otra fila multiplicada por un número real k. Lo denotamos por $F_i \rightarrow F_i + kF_j$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \Rightarrow F_1 + 2F_3} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
Multiplicar todos los elementos de una fila por un número real no nulo, k. Lo denotamos por $F_i \rightarrow kF_i$.	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \Rightarrow -2F_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Tabla 6.

4.2 Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

El cálculo de matrices inversas a partir de la definición conduce a la resolución de sistemas de ecuaciones, lo que suele ser laborioso.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$(I|B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

El método de Gauss-Jordan permite hallar la inversa de una matriz A efectuando transformaciones elementales. Para aplicar este método, procedemos como sigue:

- Partimos de una matriz formada por A y una matriz identidad del mismo orden que A. A esta matriz la llamamos matriz ampliada y la simbolizamos por $(A \,|\, I)$.
- Aplicamos las transformaciones elementales adecuadas para llegar a una matriz $(I \,|\, B)$.

La matriz B es A^{-1}.

Vamos a ver la aplicación de este método mediante un ejemplo.

Ejemplo 5

Hallemos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Planteamos la matriz ampliada $(A \,|\, I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Hacemos que el elemento a_{11} sea 1:

$$F_1 \Leftrightarrow F_3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Hacemos que los demás elementos de la primera columna, a_{21} y a_{31}, sean 0:

$$\begin{array}{l} F_2 \Rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \Rightarrow F_3 - 2F_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

- Hacemos que el elemento a_{22} sea 1:

$$F_2 \Rightarrow \frac{1}{3} F_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Hacemos que los demás elementos de la segunda columna, a_{12} y a_{32}, sean 0:

$$\begin{array}{l} F_1 \Rightarrow F_1 + F_2 \\ F_3 \Rightarrow F_3 - 2F_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right)$$

- Hacemos que el elemento a_{33} sea 1:

$$F_3 \Rightarrow -\frac{1}{2} F_3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

- Hacemos que los demás elementos de la tercera columna, a_{13} y a_{23}, sean 0.

  Con ello, obtenemos finalmente la matriz $(I\ B)$, donde $B = A - 1$:

$$\begin{array}{l} F_1 \Rightarrow F_1 - 4F_3 \\ F_2 \Rightarrow F_2 - 2F_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

A^{-1} (bloque derecho)

Actividades

2. **Halla** la matriz X que cumpla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

5. ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal con *n* incógnitas, $x_1, x_2, \dots, x_n$, es una expresión algebraica de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

donde:

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales conocidos llamados coeficientes.
- b es un número real conocido llamado término independiente.

Si el término independiente es cero, decimos que la ecuación es homogénea. Una solución de la ecuación anterior es una n-upla de números reales, $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, que sustituidos en las correspondientes incógnitas, hacen que se cumpla la igualdad, es decir:

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = b$$

Así, por ejemplo, la expresión algebraica:

$$2x - 3y = 10$$

es una ecuación lineal con dos incógnitas, donde:

- x e y son las incógnitas.

  2 y -3 son los coeficientes de x e y, respectivamente.
- 10 es el término independiente.

Y TAMBIÉN: ¿?

A un conjunto ordenado de n números lo llamamos n-upla.

En este caso, el par $(2, -2)$ es solución, ya que, si sustituimos x por 2 e y por -2, cumplimos la igualdad:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) = 10$$

6. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Como sabemos, un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que deben verificarse simultáneamente. Si todas ellas son lineales, diremos que se trata de un sistema de ecuaciones lineales.

En general, representaremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas del modo siguiente:

$$\begin{cases} ① \; a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ ② \; a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \\ ③ \; a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \rightarrow b_i \,,\; a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Una solución del sistema anterior es una n-upla de números reales, $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, que verifica simultáneamente las m ecuaciones.

6.1 Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Según sus soluciones, distinguimos las siguientes clases de sistemas.

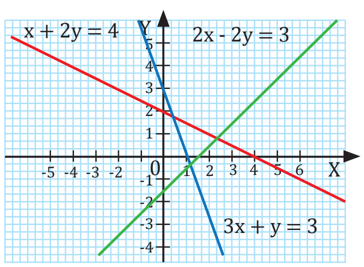
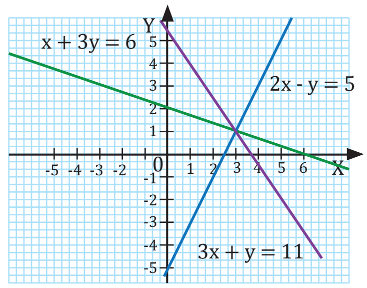
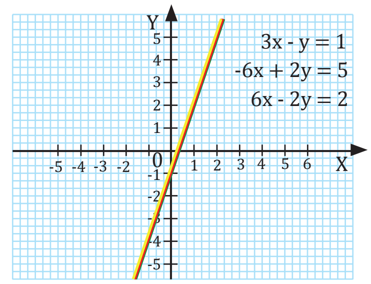
Sistema inconsistente	Sistema consistente	
Si no existe ninguna n-upla solución, el sistema se denomina **inconsistente.**	Si existe alguna n-upla solución, el sistema se denomina **consistente.**	
	Determinado	**Indeterminado**
	Si existe sólo una n-upla solución, el sistema se denomina **consistente determinado.**	Si existe más de una n-upla solución, el sistema se denomina consistente indeterminado.
Así, por ejemplo, si resolvemos gráficamente el siguiente sistema:	Así, por ejemplo, si resolvemos gráficamente el siguiente sistema:	Así, por ejemplo, si resolvemos gráficamente el siguiente sistema:
$\left.\begin{matrix} 2x - 2y = 3 \\ x + 2y = 4 \\ 3x + y = 3 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x + 3y = 6 \\ 2x - y = 5 \\ 3x + y = 11 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 3x - y = 1 \\ -6x + 2y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \end{matrix}\right\}$
		
vemos que no tiene solución, pues las tres rectas no tienen **ningún** punto común.	vemos que tiene solución única, pues las tres rectas tienen un **único** punto común.	vemos que tiene infinitas soluciones, pues las tres rectas tienen **todos** los puntos comunes.

Tabla 7.

6.2 Notación matricial

Para simplificar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, consideramos solamente los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes. En efecto, al sistema de la página anterior podemos asociar dos matrices.

Matriz asociada al sistema	Matriz ampliada asociada al sistema
• La formada por los coeficientes, que denominaremos **matriz asociada al sistema** y denotaremos por A: $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$	• La formada por los coeficientes y los términos independientes, que denominaremos **matriz ampliada asociada al sistema** y denotaremos por A': $$A' = \left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Tabla 8.

7. MÉTODO DE GAUSS

Fíjate en el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{ll}(E_1) & 2x + y - z = 3\\ (E_2) & y - 2z = -1\\ (E_3) & 3z = 6\end{array}\right\}$$

Cualquier ecuación que consideres tiene menos incógnitas que la ecuación inmediatamente anterior. A este tipo de sistemas lo llamamos sistemas escalonados. Estos sistemas se resuelven de manera muy sencilla mediante sustitución regresiva.

Utilizando notación matricial, siempre podremos resolver un sistema de ecuaciones lineales cualquiera si somos capaces de hallar una matriz escalonada equivalente mediante transformaciones elementales. A esto lo conocemos como el método de Gauss.

Y TAMBIÉN: ¿?

Llamamos sistemas equivalentes a los que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 6

Resolvamos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r}2x + y - z = 5\\ x - y + 2z = -3\\ 3x - 2y + z = -2\end{array}\right\}$$

- Hacemos que el coeficiente de la x en la primera fila sea 1, con el fin de facilitar los cálculos posteriores. Para ello, intercambiamos las dos primeras filas:

$$\left.\begin{array}{r}2x + y - z = 5\\ x - y + 2z = -3\\ 3x - 2y + z = -2\end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 \Leftrightarrow E_2} \left.\begin{array}{r}x - y + 2z = -3\\ 2x + y - z = 5\\ 3x - 2y + z = -2\end{array}\right\}$$

- Sumamos ahora a la segunda fila la primera multiplicada por -2, y a la tercera, la primera multiplicada por -3:

$$\left.\begin{array}{r}x - 2y - z = -4\\ 2x + y - z = 5\\ 3x - 2y + z = -2\end{array}\right\} \xrightarrow[E_3 \Rightarrow E_3 - 3E_1]{E_2 \Rightarrow E_2 - 2E_1} \left.\begin{array}{r}x - y + 2z = -3\\ 3y - 5z = 11\\ y - 5z = 7\end{array}\right\}$$

- Seguidamente, hacemos que en la segunda fila el coeficiente de la y sea 1, con el fin de facilitar los cálculos posteriores. En este caso, basta con intercambiar las dos últimas filas.

$$\left.\begin{array}{r}x - y + 2z = 5\\ 3y - 5z = -3\\ y - 5z = 7\end{array}\right\} \xrightarrow{E_2 \Leftrightarrow E_3} \left.\begin{array}{r}x - y + 2z = -3\\ y - 5z = 7\\ 3y - 5z = 11\end{array}\right\}$$

- Para finalizar, sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por -3:

$$\left.\begin{array}{r}-y + 2z = -3\\ y - 5z = 7\\ 3y - 5z = 11\end{array}\right\} \xrightarrow{E_3 \Rightarrow E_3 - 3E_2} \left.\begin{array}{r}x - y + 2z = -3\\ y - 5z = 7\\ 10z = -10\end{array}\right\}$$

- De este modo, hemos obtenido un sistema escalonado, cuyas soluciones podemos calcular por sustitución regresiva:

$$\left.\begin{array}{l}z = -1\\ y = 7 + 5z = 7 + 5 \cdot (-1) = 2\\ x = -3 + y - 2z = -3 + 2 - 2 \cdot (-1) = 1\end{array}\right\}$$

Actividades

3. **Resuelve**, utilizando el método de Gauss, los sistemas siguientes.

a. $$\left.\begin{array}{r}-x - 2y - z = -4\\ x + 3y + z = 5\\ 4x + 2y + 2z = 8\end{array}\right\}$$

b. $$\left.\begin{array}{r}x + y + z = 3\\ 2x - y + 2z = 0\\ 2x + 3z = 3\end{array}\right\}$$

8. INECUACIONES LINEALES

Si cambiamos el signo de igualdad (=) de una ecuación lineal por alguno de los signos de desigualdad (<, >, ≤ y ≥), obtenemos una expresión algebraica denominada inecuación lineal.

8.1. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita

Recordemos el concepto y la forma de resolver las inecuaciones lineales y los sistemas lineales de inecuaciones con una incógnita.

Inecuaciones lineales con una incógnita

Son aquellas en las que solamente aparece un polinomio de primer grado.

Llamamos inecuación de primer grado o lineal con una incógnita a cualquier inecuación equivalente a $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ o $ax + b \geq 0$, donde $a, b \in \mathbb{R} \neq 0$.

Para resolver este tipo de inecuaciones, procedemos como en el caso de las ecuaciones lineales, teniendo en cuenta que, al multiplicar o dividir por un número negativo, debemos cambiar el sentido de la desigualdad para obtener una inecuación equivalente.

Recordemos su representación gráfica:

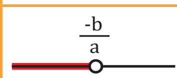
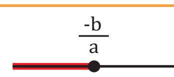
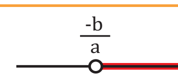
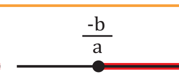
Conjunto solución	$S = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$;	$S = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right]$;	$S = \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$;	$S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right[$
Representación gráfica				

Tabla 9.

Ejemplo 7

Resolvamos la inecuación:

$$\frac{3(x-7)}{2} + x \leq \frac{5(x-1)}{2}$$

- Eliminamos paréntesis:

$$\frac{3x-21}{2} + x \leq \frac{5x-5}{2}$$

- Eliminamos denominadores:

$$\text{m.c.m.}\ (2, 2) = 2$$
$$3x - 21 + 2x \leq 5x - 5$$

- Trasladamos términos y reducimos los semejantes:

$$3x + 2x - 5x \leq -5 + 21$$
$$0x \leq 16$$

- Para cualquier x que consideremos, el primer miembro valdrá siempre 0, por lo que se cumplirá la desigualdad $0 \leq 0$.

Luego, todos los números reales serán solución de la inecuación. Escribiremos:

$$S = \mathbb{R} = (+\infty, -\infty)$$

Sistemas lineales de inecuaciones con una incógnita

Dado un conjunto de inecuaciones lineales con una incógnita:

$$3x - 2 < 4x + 1$$

$$4x + 3 \geq 2\,(x + 2)$$

Si imponemos que todas ellas han de verificarse simultáneamente, se tiene un sistema de inecuaciones.

Llamamos sistema lineal de inecuaciones con una incógnita a un conjunto de inecuaciones lineales con una incógnita que deben cumplirse simultáneamente.

El conjunto solución son valores de x que satisfacen a la vez todas las inecuaciones. Para resolver este tipo de sistemas, procedemos como indicamos a continuación:

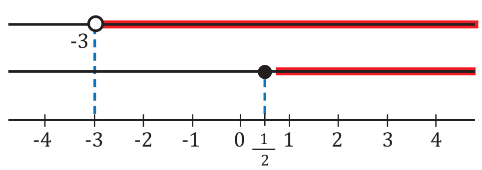
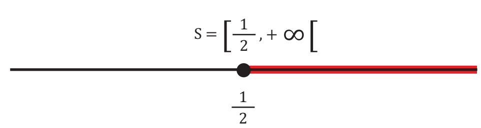
Procedimiento	Ejemplo
Resolvemos por separado cada una de las inecuaciones.	$3x - 2 < 4x + 1$ $4x + 3 \geq 2(x + 2)$ Primera inecuación: $3x - 2 < 4x + 1$; $3x - 4x < 1 + 2$; $-x < 3$; $x > -3$; $S_1 = (-3, +\infty)$ $\wedge$ Segunda inecuación: $4x + 3 \geq 2(x + 2)$; $4x + 3 \geq 2x + 4$; $4x - 2x \geq 4 - 3$; $2x \geq 1$; $x \geq \frac{1}{2}$; $S_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
Representamos sobre una misma recta las soluciones de cada inecuación.	
Determinamos las soluciones comunes a todas las inecuaciones del sistema.	Las soluciones comunes son los valores de x tales que $x \geq \frac{1}{2}$: 

Tabla 10.

8.2. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Considera la desigualdad algebraica $x - y < 6$. Se trata de una inecuación lineal con dos incógnitas.

Llamamos *inecuación* lineal con dos incógnitas a cualquier inecuación equivalente a $ax + by < c$, $ax + by \leq c$, $ax + by > c$ o $ax + by \geq c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Construimos la tabla asignando diversos valores a x e y. Fíjate en que la inecuación $x - y < 6$ solo se verifica para determinados pares de valores de x e y. Cada par de valores de x e y que satisface la inecuación es una solución de la inecuación.

x	y	x - y < 6
1	9	$1 - 9 < 6$
3	4	$3 - 4 < 6$
4	- 4	$4 - (-4) < 6$
...	.....	....

Tabla 11.

Representación gráfica de las soluciones

Las soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas pueden representarse gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas asignando a cada par de valores, x e y, de una solución el punto (x, y) del plano de coordenadas.

Observa que, si sustituimos en la inecuación $x - y < 6$ el signo $<$ por el signo $=$, obtenemos la ecuación lineal $x - y = 6$, que equivale a la ecuación $y = x - 6$, cuyas soluciones se corresponden con los puntos de una recta.

De acuerdo con la figura 1, vemos que esta recta divide el plano en dos semiplanos, A y B:

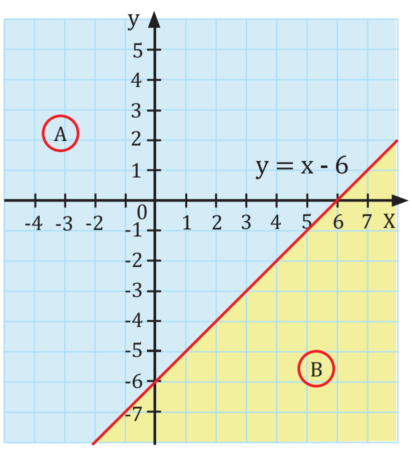


Fig. 1.

- Las coordenadas (x, y) de los puntos del semiplano A cumplen:

$$y > x - 6 \rightarrow x - y < 6$$

- Las coordenadas (x, y) de los puntos de la recta cumplen:

$$y = x - 6 \rightarrow x - y = 6$$

- Las coordenadas (x, y) de los puntos del semiplano B cumplen:

$$y < x - 6 \rightarrow x - y > 6$$

Así, las soluciones de la inecuación $x - y < 6$ son las coordenadas (x, y) de los puntos del semiplano A.

Vemos, pues, que la representación gráfica de las soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas es un semiplano.

Si en la inecuación aparecen los signos $\leq$ o $\geq$, las coordenadas de los puntos de la recta que determina el semiplano solución también son solución de la inecuación.

En la práctica, para determinar el semiplano solución, basta con tomar un punto situado en uno de los semiplanos y comprobar si sus coordenadas verifican la inecuación:

- Si la verifican, las coordenadas de los puntos del semiplano escogido serán soluciones de la inecuación.
- Caso contrario, las soluciones de la inecuación serán las coordenadas de los puntos del otro semiplano.

Ejemplo 8

Resolvamos gráficamente la inecuación:
$3x - y < 2$

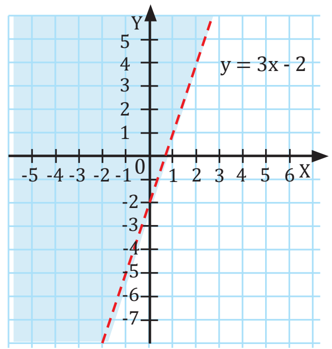
- Representamos la recta $3x - y = 2$, que equivale a $y = 3x - 2$.
- Consideramos un punto de uno de los semiplanos en que queda dividido el plano y sustituimos sus coordenadas en la inecuación. Tomamos, por ejemplo, el punto $(0, 0)$:

$$3 \cdot 0 - 0 < 2 \rightarrow 0 < 2$$

Las coordenadas del punto $(0, 0)$ son solución de la inecuación, y también lo son las coordenadas de todos los puntos del semiplano que lo contiene.

- Sombreamos el semiplano solución y marcamos con un trazo discontinuo la recta $y = 3x - 2$.

Con ello, indicamos que las coordenadas de los puntos de dicha recta no son solución de la inecuación, ya que se trata de una desigualdad estricta (<).



Ejemplo 9

Resolvamos gráficamente la inecuación:
$x + y \geq 0$

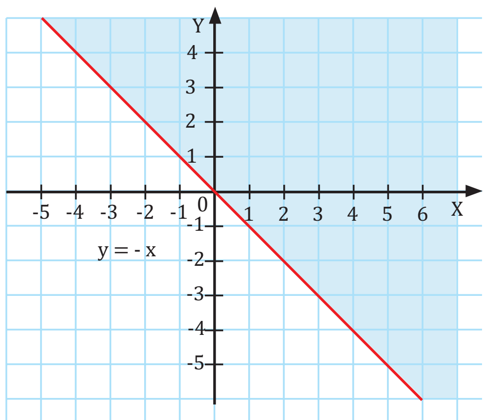
- Representamos la recta $x + y = 0$, que equivale a $y = -x$.
- Consideramos un punto de uno de los semiplanos en que queda dividido el plano y sustituimos sus coordenadas en la inecuación. Tomamos, por ejemplo, el punto $(0, -1)$:

$$0 + (-1) \geq 0 \rightarrow -1 \geq 0 \quad \text{(Falso)}$$

Las coordenadas del punto $(0, -1)$ no son solución de la inecuación, y tampoco lo son las de todos los puntos del semiplano que lo contiene.
Por tanto, las soluciones serán las coordenadas de los puntos del otro semiplano.

- Sombreamos el semiplano solución y marcamos con un trazo continuo la recta $y = -x$.

Con ello, indicamos que los puntos de dicha recta son solución de la inecuación, ya que se trata de una desigualdad no estricta (≥).



8.3. Sistemas lineales de inecuaciones con dos incógnitas

Considera el siguiente conjunto de inecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$x + y < 10$$

$$x - y \geq 6$$

Si imponemos que todas ellas han de verificarse simultáneamente, tenemos un sistema lineal de inecuaciones.

Llamamos sistema lineal de inecuaciones con dos incógnitas a un conjunto de inecuaciones lineales con dos incógnitas que deben verificarse simultáneamente.

Representación gráfica de las soluciones

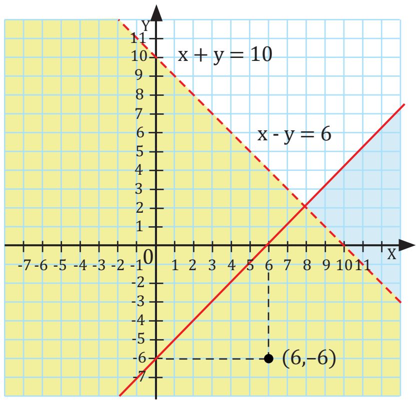


Fig. 2.

Hemos visto que las soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas son las coordenadas de los puntos de un semiplano.

Considera de nuevo el sistema anterior, formado por dos inecuaciones lineales con dos incógnitas. Representamos en la figura los semiplanos solución de ambas inecuaciones.

Las soluciones del sistema son las coordenadas de los puntos que pertenecen a la vez a los dos semiplanos solución (región doblemente sombreada).

Así, por ejemplo, el punto $(6, -6)$ es común a ambos semiplanos. Por tanto, $x = 6$ e $y = -6$ es solución de ambas inecuaciones y, en consecuencia, del sistema.

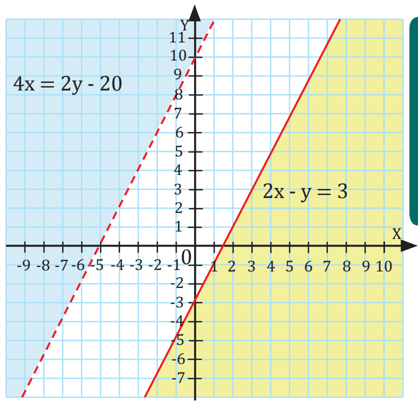


Fig. 3.

Ejemplo 10

Resolvamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y > 3 \\ 4x \leq 2y - 20 \end{array}\right\}$$

- Representamos en un mismo gráfico las soluciones de ambas inecuaciones. Para ello, representamos las rectas $2x - y = 3$ y $4x = 2y - 20$.
  - Las coordenadas del punto $(0, 0)$ no son solución de $2x - y > 3$.
  - Las coordenadas del punto $(0, 0)$ no son solución de $4x \leq 2y - 20$.
- Como no existe ninguna región común a ambos semiplanos, el sistema no tiene solución.

9. INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Año	Acontecimiento
1826	Joseph Fourier anticipa la programación lineal. Carl Friedrich Gauss resuelve ecuaciones lineales por eliminación "gaussiana".
1902	Gyula Farkas concibe un método para resolver sistemas de inecuaciones.
1947	George Dantzig publica el algoritmo simplex y John von Neumann desarrolla la teoría de la dualidad. Se sabe que Leonid Kantoróvich también formuló la teoría en forma independiente.
1984	Narendra Karmarkar introduce el método del punto interior para resolver problemas de programación lineal.

Tabla 12. Fuente: https://goo.gl/IZhF87

En las actividades económicas, analizamos con frecuencia variables que están determinadas por inecuaciones, con el objetivo de hallar para qué valores de esas variables una determinada función (beneficios, costos...) alcanza su valor extremo (máximo o mínimo).

Lee con atención los enunciados de los siguientes problemas y **observa** su planteamiento matemático.

Estos dos problemas tienen en común lo siguiente:

- Debemos optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal de dos variables.

Problema A

Una ONG que se autofinancia posee una empresa de bebidas refrescantes. De entre los refrescos que fabrica, los que más se venden son Maná y Vital. Un litro del primero contiene 30 cl de extracto de cola, 10 cl de ácido cítrico y el resto es agua carbonatada; un litro del segundo contiene 10 cl de extracto de cola, 20 cl de ácido cítrico y el resto es, también, agua carbonatada. Se sabe que la empresa dispone en sus cubas de 3 600 l de extracto de cola y de 3 200 l de ácido cítrico. La venta de 1 l de Maná produce un beneficio de 0,2, mientras que el beneficio por la venta de 1 l de Vital es de 0,1.
¿Cuántos litros de cada refresco debe preparar la empresa para que el **beneficio** sea **máximo**?

Problema B

El tratamiento de cierta enfermedad requiere la administración de dos complejos vitamínicos, A y B. Cada semana es preciso consumir, como mínimo, 450 mg de A y 200 mg de B. Estos complejos se presentan en dos preparados diferentes: el primero, denominado Amium, con comprimidos que cuestan 25 centavos de dólar cada uno y que contienen 15 mg de A y 25 mg de B; y el segundo, Bolium, cuyos comprimidos cuestan 30 centavos de dólar cada uno y que contienen 28 mg de A y 10 mg de B. Averigua qué número de comprimidos de cada preparado debe tomar cada individuo para que el **coste** del tratamiento sea **mínimo**.

problema A	Problema B
$z = 0{,}2x + 0{,}1y$	$z = 25x + 30y$

Tabla 13.

Esta función recibe el nombre de función objetivo.

- Las variables deben cumplir una serie de inecuaciones lineales.

Problema A	Problema B
$0{,}30x + 0{,}10y \leq 3600$	$15x + 28y \geq 450$
$0{,}10x + 0{,}20y \leq 3200$	$25x + 10y \geq 200$
$x \geq 0$	$x \geq 0$
$y \geq 0$	$y \geq 0$

Tabla 14.

Estas inecuaciones reciben el nombre de restricciones.

Resolver un problema de programación lineal consiste en optimizar una función lineal, denominada función objetivo, sujeta a una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones lineales.

Los métodos para resolver un problema de programación lineal pueden ser extremadamente complejos. Solo en el caso de dos variables (programación lineal bidimensional) pueden determinarse con relativa facilidad, como verás en las páginas siguientes.

9.1. Métodos de resolución

Los problemas de programación lineal, en el caso de dos variables, pueden resolverse por métodos algebraicos o gráficos.

Método algebraico

Puesto que la solución del problema, si existe, debe ser solución del sistema de inecuaciones formado por las restricciones, resolvemos en primer lugar dicho sistema.

A la región del plano obtenida la denominamos región factible. Esta puede ser acotada o no, como vemos en los ejemplos.

Podemos demostrar que la solución del problema se encuentra siempre en la frontera de la región factible. Para encontrar dicha solución, debemos hallar los vértices de esta región y calcular el valor de la función objetivo en cada uno de ellos.

El vértice en que toma el valor extremo es la solución del problema. Si la función es máxima (o mínima) en dos vértices, la solución óptima se sitúa en cualquiera de los puntos del segmento que los une.

Así pues, podemos decir que los pasos a seguir para hallar analíticamente la solución de un problema en dos variables son:

- Resolver el sistema de inecuaciones formado por las restricciones para hallar la región factible.
- Obtener los vértices de la región factible.
- Calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices para determinar en cuál de ellos toma el valor máximo o mínimo.

Método gráfico

La solución de un problema de programación lineal bidimensional también puede hallarse gráficamente, como describiremos a continuación, mediante el método de las rectas de nivel.

Sea $z = ax + by$ la función objetivo asociada con un problema de programación lineal. Llamamos recta de nivel a cualquier recta de ecuación:

$$ax + by = k \; ; \; K \in \mathbb{R}$$

Cada una de estas rectas corresponde a los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor, k. Al variar k, se obtiene una familia de rectas paralelas.

Si consideramos las rectas de esta familia que cortan a la región factible, tenemos:

- El valor extremo de k se alcanzará cuando la recta pase por uno de los vértices de la región factible o en todos los puntos de un lado si la recta es paralela a ese lado.
- La ordenada en el origen de estas rectas es $y_0 = k/b$, de donde se obtiene que el valor de k es proporcional a dicha ordenada.
    - Si $b > 0$, la recta cuya ordenada en el origen sea mayor nos dará el vértice que maximiza la función objetivo y aquella cuya y_0 sea menor nos dará el vértice que minimiza la función objetivo.
    - Si $b < 0$, la recta cuya ordenada en el origen sea menor nos dará el vértice que maximiza la función objetivo y aquella cuya y_0 sea mayor nos dará el vértice que minimiza la función objetivo.

Entonces podemos decir que:

Los pasos que debemos seguir para hallar gráficamente la solución de un problema de programación lineal en dos variables son:

- Resolver el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y representar la región factible.
- Representar la recta de ecuación $ax + by = 0$, siendo la función objetivo $z = ax + by$.
- Trazar rectas paralelas a esta recta que pasen por cada uno de los vértices de la región factible. Aquellas rectas cuyas ordenadas en el origen alcancen los valores extremos nos darán la solución del problema.

Método algebraico

Ejemplo 11

Debemos maximizar la función $z = 0{,}2x + 0{,}1y$ sujeta a las restricciones siguientes:

$0{,}30x + 0{,}10y \leq 3\,600$; $0{,}10x + 0{,}20y \leq 3\,200$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

- Resolvemos el sistema de inecuaciones.

  Para ello, representamos las rectas $0{,}30x + 0{,}10y = 3600$ y $0{,}10x + 0{,}20y = 3200$.

- Las coordenadas del punto $(0, 0)$ son solución de la inecuación $0{,}30x + 0{,}10y \leq 3\,600$.

  Luego, de los dos semiplanos determinados por la recta $0{,}30x + 0{,}10y = 3\,600$, sombreamos el que contiene el punto $(0, 0)$.

- Puesto que ha de ser también $x \geq 0$ e $y \geq 0$, coloreamos la zona correspondiente al primer cuadrante.

- Obtenemos las coordenadas de los vértices de la región factible. Para ello, debemos determinar los puntos de corte de las rectas que contienen los lados del polígono. Esto se reduce a resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

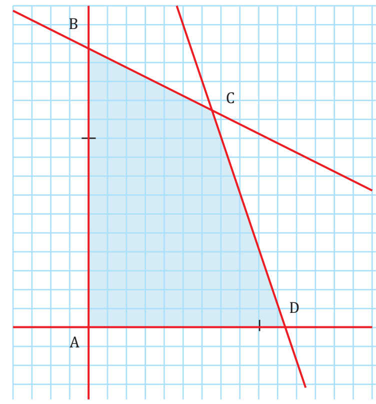
$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 0{,}10x + 0{,}20\,y = 3200 \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}30x + 0{,}10\,y = 3600 \\ 0{,}10x + 0{,}20\,y = 3200 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 0{,}30x + 0{,}10\,y = 3600 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

La optimización de resultados a partir de unas restricciones es fundamental en áreas como la economía, la ingeniería, etc. Si accedes a la página www.investigacionoperativa.com, encontrarás información sobre los distintos métodos de optimización, así como un simulador para optimizar funciones sencillas

La región factible es, pues, el polígono convexo de la figura.



Las soluciones de estos sistemas determinan los siguientes puntos:

$$A = (0, 0), B = (0, 16\,000),$$

$$C = (8000, 12000), D = (12\,000, 0)$$

- Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de estos puntos:

$$A = (0, 0) \Rightarrow z = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 0 = 0$$

$$B = (0, 16000) \Rightarrow z = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 16000 = 1600$$

$$C = (8000, 12000) \Rightarrow z = 0{,}2 \cdot 8\,000 + 0{,}1 \cdot 12000 = 2800$$

$$D = (12000, 0) \Rightarrow z = 0{,}2 \cdot 12\,000 + 0{,}1 \cdot 0 = 2400$$

Vemos que la función objetivo toma su valor máximo en el punto $C = (8\,000, 12\,000)$. Luego, para que el beneficio de la empresa sea máximo, deberá vender $8\,000$ l de Maná y $12\,000$ l de Vital.

Método gráfico

Ejemplo 12

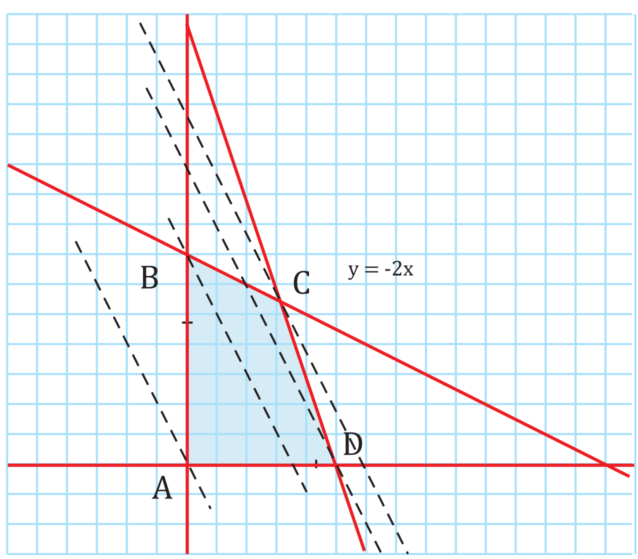
Debemos maximizar la función $z = 0{,}2x + 0{,}1$ y sujeta a las restricciones siguientes:
$0{,}30x + 0{,}10y \leq 3\,600$; $0{,}10x + 0{,}20y \leq 3\,200$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

- En el apartado anterior ya obtuvimos la región factible (fig. 1).
- Representamos ahora la recta:

  $0{,}2x + 0{,}1y = 0$

  y trazamos una paralela a esta recta por cada uno de los vértices.

  Como el coeficiente de la y es positivo, la recta cuya ordenada en el origen tenga el valor más alto nos dará el máximo.



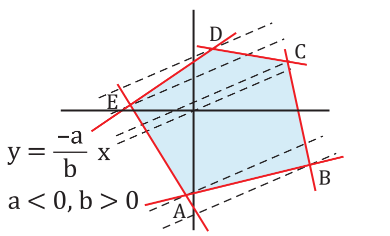
El máximo se alcanza, pues, en el punto $(8000, 12\,000)$. Así, el beneficio de la empresa será máximo si vende 8000 l de Maná y $12\,000$ l de Vital.

9.2. Tipos de soluciones

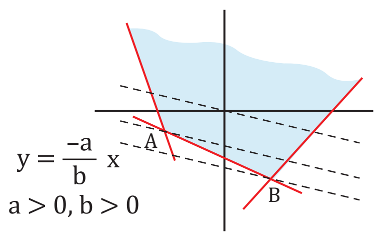
Los problemas de programación lineal que hemos resuelto hasta ahora tenían solución única. Sin embargo, de la resolución gráfica se deduce fácilmente que el problema puede no tener solución, o bien, tener solución pero no ser única.

La siguiente tabla muestra los diferentes casos que pueden presentarse.

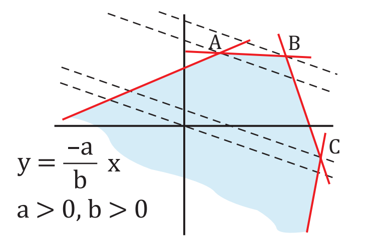
Solución única



El máximo se alcanza en el punto D y el mínimo en el punto B.

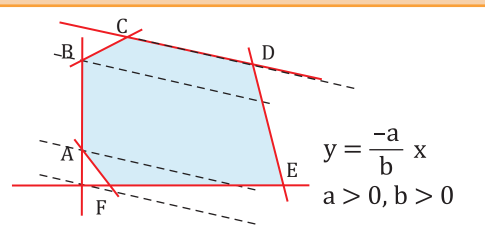


El mínimo se alcanza en el punto B.

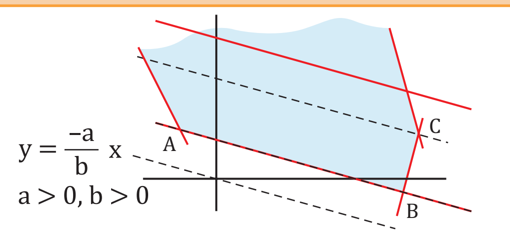


El máximo se alcanza en el punto B.

Infinitas soluciones

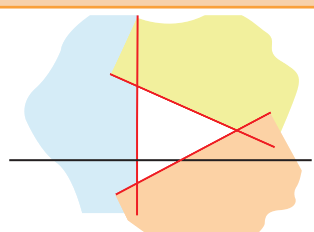


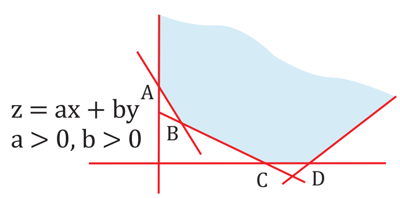
El máximo coincide con cualquier punto del segmento CD.



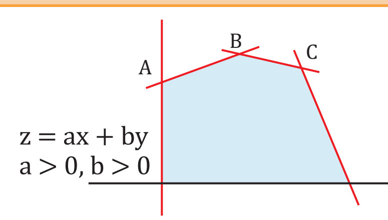
El mínimo coincide con cualquier punto del segmento AB.

Sin solución


Como no existe región factible, no tiene solución.



La región factible no está acotada superiormente y, por tanto, la función objetivo no puede maximizarse.



La región factible no está acotada inferiormente y, por tanto, la función objetivo no puede minimizarse.

Tabla 15

Actividades

4. **Resuelve** los problemas de la página 99 mediante los métodos algebraico y gráfico.
5. **Determina** el tipo de solución del siguiente problema de programación lineal.

   Minimizar la función objetivo $z = x + 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

   $x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 3; x - y \leq 6$

10. APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Como habrás podido apreciar, la programación lineal tiene importantes aplicaciones en economía, pues da respuesta a los problemas de minimizar costos y maximizar beneficios. A continuación, te presentamos dos tipos de situaciones clásicas cuya formulación nos lleva también a un problema de programación lineal.

10.1. Problema del transporte

La formulación general de un problema de este tipo es la siguiente:

Un cierto producto se elabora en m centros de producción en cantidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$, y debe enviarse a n destinos, donde se recibirá en cantidades $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Conocidos los costos de envío desde cada origen a cada destino, se trata de determinar las cantidades que deben enviarse desde cada origen a cada destino de modo que se satisfagan las necesidades de envío y se minimice el costo total del transporte.

Ejemplo 13

Dos factorías de refrescos, A y B, producen, respectivamente, 6 000 y 4 500 cajas diarias. Los puntos de distribución de dichos refrescos son tres grandes superficies, S_1, S_2 y S_3, cuya demanda es de 2250, 4500 y 3750 cajas, respectivamente. El coste de transporte por caja (en dólares), desde cada una de las factorías a los centros de venta, aparece en la tabla 1.

Averigua cuántas cajas deben enviarse desde cada factoría a cada superficie para que el transporte sea lo más económico posible.

Sean x e y las cajas que salen de la factoría A a los centros S_1 y S_2, respectivamente. Construimos la siguiente tabla de distribución:

	S_1	S_2	S_3
A	x	y	$6\,000 - (x + y) = 6\,000 - x - y$
B	$2\,250 - x$	$4\,500 - y$	$3\,750 - [6\,000 - (x + y)] = x + y - 2250$

Tabla 17.

Ninguna de estas cantidades puede ser negativa. Luego, se tiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \,;\, 6\,000 - x - y \geq 0 \,;\, 2\,250 - x \geq 0 \,;\, 4\,500 - y \geq 0$$
$$x + y - 2\,250 \geq 0$$

La función objetivo es, en este caso, el coste del transporte, y la obtendremos sumando los productos del número de cajas transportadas en cada recorrido por sus respectivos precios de transporte (tabla 1):

$$z = 2x + 1{,}5y + 3\,(6\,000 - x - y) + (2\,250 - x) + 2\,(4\,500 - y) +$$
$$+ 2{,}5\,(x + y - 2\,250) = 0{,}5x - y + 23\,625$$

El problema se reduce a minimizar la función objetivo $z = 0{,}5x - y + 23625$, sujeta a las restricciones dadas por las inecuaciones anteriores.

Utilizando el método gráfico (fig. 3), puedes ver que la función z alcanza el mínimo en el punto (0, 4500), por lo que la solución es $x = 0$ e $y = 4500$. La cantidad de cajas que deben salir de cada factoría es la indicada en la tabla 4.

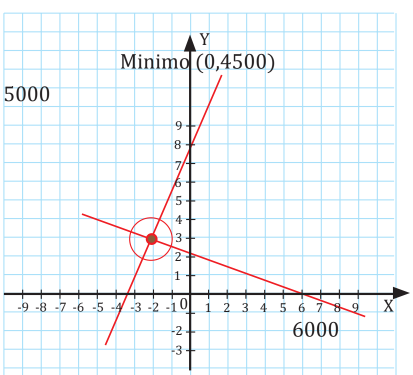


Fig. 4

	S_1	S_2	S_3
A	0	4500	1500
B	2250	0	2250

Tabla 16.

10.2. Problema de la dieta

La formulación general de un problema de este tipo es la siguiente:

Para que una dieta resulte equilibrada, cada individuo debe ingerir m elementos nutritivos básicos en cantidades mínimas $b_1, b_2, \dots, b_m$. Estos elementos nutritivos se encuentran en n alimentos diferentes. Conocidas las cantidades de cada elemento nutritivo contenidas en una unidad de cada alimento y el costo de una unidad de cada alimento, se trata de determinar la dieta más económica que satisfaga las necesidades nutritivas mínimas.

Ejemplo 14

Para suplir la falta de minerales de una dieta hipocalórica, una persona debe ingerir tres clases diferentes de minerales: calcio (Ca), magnesio (Mg) y yodo (I). Cada día debe tomar al menos 437 mg de calcio, 270 mg de magnesio y 199 mg de yodo. Los mencionados minerales se encuentran en dos preparados farmacológicos diferentes: el Nervo, que cuesta \$ 5 y cuya composición es de 16 mg de calcio, 32 mg de magnesio y 32 mg de yodo; y el Mieli, que cuesta \$ 6 y cuya composición es de 27 mg de calcio, 54 mg de magnesio y 9 mg de yodo. Determinemos el número de preparados de cada tipo que permitirá un tratamiento más económico.

Sean x e y el número de preparados de Nervo y de Mieli, respectivamente. Construimos la siguiente tabla de distribución:

	Ca (mg)	Mg (mg)	I (mg)	Coste
x preparados Nervo	$16x$	$32x$	$32x$	$5x$
y preparados Mieli	$27y$	$54y$	$9y$	$6y$
Ingesta mínima	437	270	199	

Tabla 18.

Con los datos de esta tabla, y teniendo en cuenta que el número de preparados no puede ser negativo, escribimos el siguiente conjunto de restricciones:

$$x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \; ; \; 16x + 27y \geq 437 \; ; \; 32x + 54y \geq 270 \; ; \; 32x + 9y \geq 199$$

La función objetivo, en este caso el coste de los preparados, se obtiene sumando los costes de ambos tipos de preparados. Así:

$$z = 5x + 6y$$

El problema se reduce a minimizar la función objetivo $z = 5x + 6y$, sujeta a las restricciones dadas por las inecuaciones anteriores.

Utilizando el método gráfico, puedes ver que la función z alcanza el mínimo en el punto $(2, 15)$, por lo que la solución es $x = 2$ e $y = 15$. Para minimizar costes, deben ingerirse 2 preparados de Nervo y 15 de Mieli cada día.

Observamos que no hubiese sido posible maximizar la función, puesto que la región factible no está acotada superiormente.

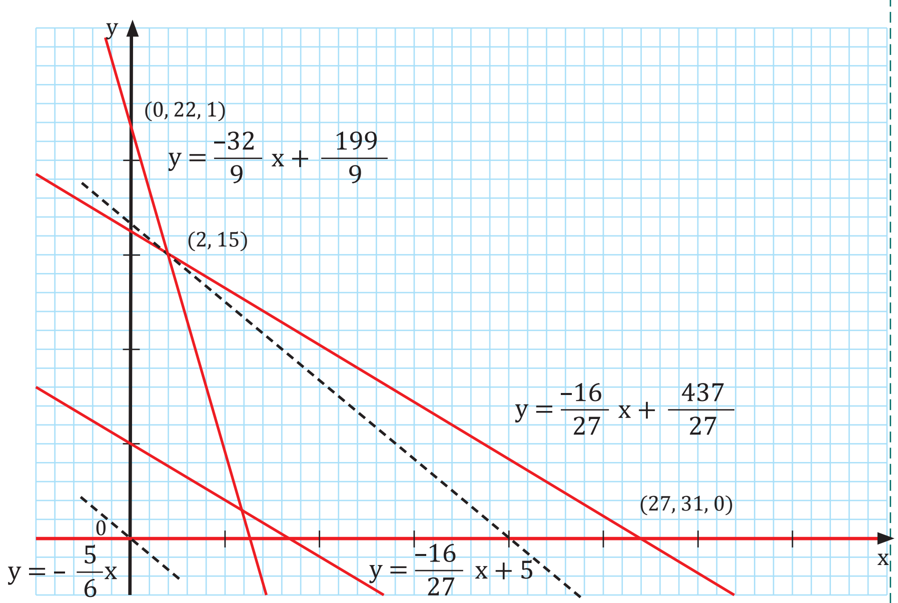


Fig. 4

10.3. Otras aplicaciones

Aunque a lo largo de esta unidad únicamente hemos resuelto problemas de programación lineal bidimensional, este tipo de análisis se utiliza en casos donde intervienen cientos e incluso miles de variables.

En general, la programación lineal se sitúa en el marco de la investigación operativa, un conjunto de técnicas racionales de análisis y de resolución de problemas, que tiene por objeto ayudar a los responsables en las decisiones sobre asuntos en los que interviene un gran número de variables.

El nombre de programación lineal no procede, como puede parecer, de la creación de programas para ordenadores, sino de un término militar, programar, que significa «realizar planes o propuestas de tiempo para el entrenamiento, la logística o el despliegue de las unidades de combate».

Aunque parece ser que la programación lineal fue utilizada por G. Monge en 1776, se considera a L. V. Kantoróvich uno de sus creadores. La presentó en su libro *Métodos matemáticos para la organización y la producción* (1939) y la desarrolló en su trabajo *Sobre la transferencia de masas* (1942). Kantoróvich recibió el premio Nobel de economía en 1975 por sus aportaciones al problema de la asignación óptima de recursos humanos.

La investigación de operaciones en general y la programación lineal en particular recibieron un gran impulso gracias a los ordenadores. Uno de los hitos fue la aparición del método *simplex* de programación lineal. Este método, desarrollado por G. B. Dantzig en 1947, consiste en la aplicación de un algoritmo para optimizar el valor de la función objetivo teniendo en cuenta las restricciones planteadas.

El método *simplex* requiere el uso de ordenadores. Parte de uno de los vértices de la región factible, por ejemplo el vértice A, y aplica la siguiente propiedad: si la función objetivo no toma su valor máximo en el vértice A, entonces existe una arista que parte del vértice A y a lo largo de la cual la función objetivo aumenta.

El procedimiento es iterativo, pues mejora los resultados de la función objetivo en cada etapa hasta alcanzar la solución buscada. Esta se encuentra en un vértice del que no parta ninguna arista a lo largo de la cual, la función objetivo aumente.

Actividades

6. Una ONG europea dedicada a la asistencia sanitaria recibe de la UE, cada mes, 8000 lotes sanitarios de mantenimiento y $15\,000$ de choque. En esta ocasión, los lotes deben llegar a tres localidades diferentes del África ecuatorial, A, B y C. Los lotes de mantenimiento salen de Brujas y los de choque, de Múnich, siendo el coste de envío desde Brujas a A, B y C de $\$\,2$, $\$\,13$ y $\$\,6$, respectivamente. Y desde Múnich, de $\$\,12$, $\$\,4$ y $\$\,4$.

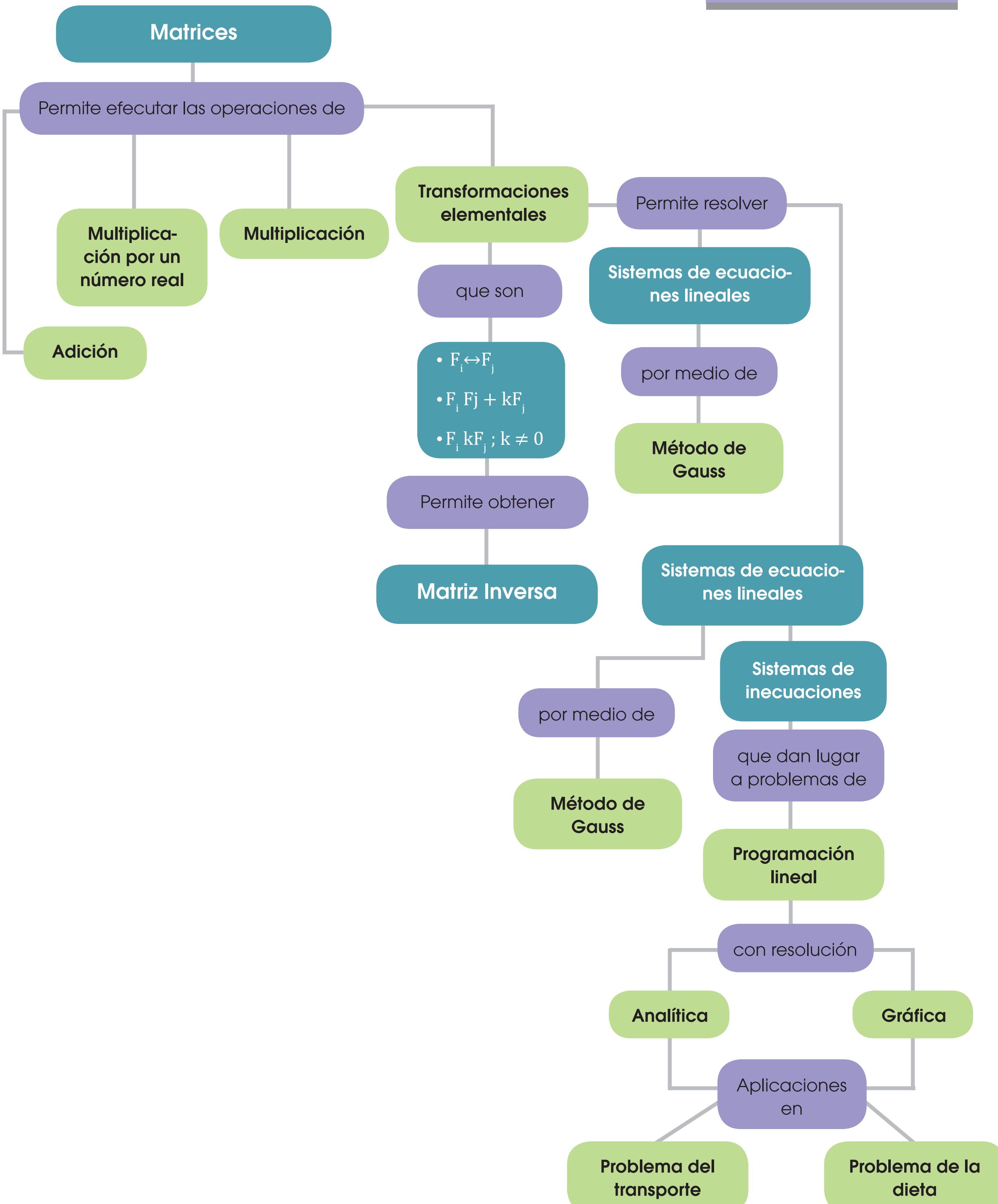
   Si las tres poblaciones necesitan, respectivamente, 6000, 7000 y $10\,000$ lotes, **determina** cómo debe organizarse el transporte para que su gasto sea mínimo.

7. Para crecer de manera óptima, un cordero adulto debe ingerir diariamente 20g de componente C_1, 30g de C_2, 300g de C_3 y 20g de C_4. Un criador dispone de dos tipos de alimento, A y B, para corderos, que le cuestan, respectivamente, $90\ \$/t$ y $60\ \$/t$.

   Entre otros componentes, 1kg de alimento del tipo A contiene 10g de C_1, 10g de C_2, 200g de C_3 y 20g de C_4, mientras que 1kg de tipo B contiene 10g de C_1, 30g de C_2 y 75g de C_3.

   Determina cómo debe mezclar el criador los alimentos A y B para que se cumplan las necesidades de los corderos con el mínimo de gastos.

3 Resumen



Matrices
Permite efectuar las operaciones de
Multiplicación por un número real
Multiplicación
Adición
Transformaciones elementales
que son
• $F_i \leftrightarrow F_j$
• F_i Fj + kF_j
• F_i kF_j ; $k \neq 0$
Permite obtener
Matriz Inversa
Permite resolver
Sistemas de ecuaciones lineales
por medio de
Método de Gauss
Sistemas de ecuaciones lineales
por medio de
Método de Gauss
Sistemas de inecuaciones
que dan lugar a problemas de
Programación lineal
con resolución
Analítica
Gráfica
Aplicaciones en
Problema del transporte
Problema de la dieta

Problemas resueltos

A

1. Una empresa química europea dispone de 21 millones de dólares para invertir en un proyecto de I + D. La distribución de la inversión se llevará a cabo en el campo de la farmacología y en el de la microbiología.En el primero, donde obtendrá un 10% de beneficio anual, invertirá a lo sumo 13 millones de dólares, mientras que en el segundo, donde los beneficios ascenderán en el mismo período de tiempo al 8%, será, por lo menos, de 6 millones.

Debido a presiones políticas, la inversión en microbiología no deberá ser superior a la mitad de la farmacológica. **Determina** cómo deberá invertir la empresa para obtener el máximo beneficio anual.

Solución

Sea x la inversión en farmacología e y la inversión en microbiología (en millones de dólares). El beneficio anual será:

$$z = 0{,}1x + 0{,}08y$$

Escribimos las restricciones:

- La inversión tiene que ser, a lo sumo, de 21 millones de dólares:

$$x + y \leq 21$$

- La inversión en farmacología tiene que ser, a lo sumo, de 13 millones de dólares:

$$x \leq 13$$

- La inversión en microbiología tiene que ser, como mínimo, de 6 millones de dólares:

$$y \geq 6$$

- La inversión en microbiología no deberá ser superior a la mitad de la farmacológica:

$$y \leq \frac{x}{2} \Rightarrow 2y \leq x$$

- Las cantidades invertidas en cada uno de los campos no pueden ser negativas:

$$x \geq 0 \,;\, y \geq 0$$

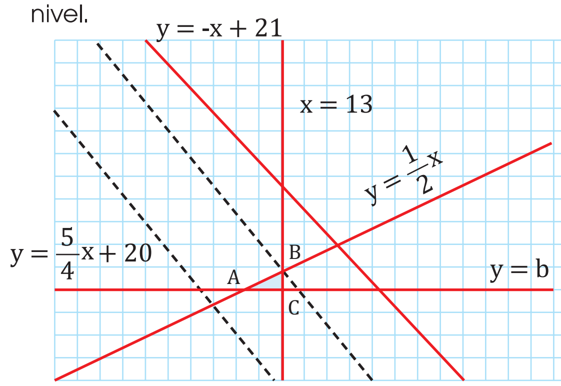


Así, se trata de maximizar la función $z = 0{,}1x + 0{,}08y$ sujeta al conjunto de restricciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} x + y \leq 21 \\ x \leq 13 \\ y \geq 6 \\ 2y \leq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el problema por el método gráfico:

- Representamos la región factible y las rectas de nivel.



De todas las rectas de nivel que tocan la región factible, la que nos da el máximo beneficio es la que pasa por el vértice B.

Calculamos las coordenadas de B:

$$\left.\begin{array}{r} 2y = x \\ x = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow B = (13,\, 6{,}5)$$

Luego, el beneficio máximo se obtiene invirtiendo 13 millones de dólares en farmacología y 6,5 millones de dólares en microbiología.

Ejercicios y problemas

1 Matrices

1. **Escribe** una matriz cuadrada de orden 4 con las características que, en cada caso, se indican a continuación.
   a. Triangular superior
   b. Triangular inferior
   c. Diagonal
   d. Identidad

2. **Considera** las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calcula:
   a. $A + B$
   b. $A - B$
   c. $B - A$
   d. $5A$
   e. $4B$
   f. $(-3)A$

3. En los años 2013 y 2014, una ONG envió ayuda humanitaria, consistente en medicamentos (M), prendas de vestir (P) y alimentos (AL), a cuatro países africanos A, B, C, D.

   La matriz siguiente recoge las toneladas anuales de cada tipo de ayuda a cada país

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ X = & \begin{pmatrix} 10 & 30 & 15 & 12 \\ 215 & 512 & 317 & 300 \\ 745 & 862 & 613 & 923 \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ P \\ AL \end{array} \end{array}$$

   Por otra parte, el valor, en \$, de una tonelada de cada tipo de ayuda era, en los años 2013 y 2014:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} M & P & AL \end{array} \\ X = & \begin{pmatrix} 36000 & 180 & 85 \\ 37500 & 186 & 88 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2013 \\ 2014 \end{array} \end{array}$$

   Calcula el valor total de los envíos a cada país en cada año.

4. **Considera** las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calcula:
   a. $A \cdot B$ b. $B \cdot C$ c. $A \cdot B \cdot C$ d. $2B + (A \cdot C)$

5. **Calcula** la inversa de cada una de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

6. **Considera** las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   Calcula X para que se cumpla $A^2 \cdot X - B = C$

7. **Considera** las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$

   Calcula X para que se cumpla $A^2 \cdot X + B = O$

8. **Considera** las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   Calcula X para que se cumpla $A \cdot X \cdot B = 4C$



9. **Calcula** la matriz $(A^t \cdot A^{-1})^2$ siendo A la matriz siguiente.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. **Considera** las matrices siguientes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Averigua si se cumple que:

$T^{-1} + (M \cdot N)^{-1} = (T + M \cdot N)^{-1}$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

11. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1)\ 3x - y + 2z = 1 \\ (2)\ x + y + z = 3 \\ (3)\ 2x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

Averigua cuál o cuáles de las ternas siguientes son solución:

a. $(4, 0, 3)$

b. $(1, -1, 2)$

c. $(1, 2, 0)$

d. $(4, 10, 0)$

12. **Clasifica** según sus soluciones, utilizando el método de Gauss, los sistemas siguientes. **Resuelve** los casos de compatibilidad

a. $\begin{cases} (1)\ 3x + 2y + z = 3 \\ (2)\ x + y + z = 1 \\ (3)\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} (1)\ x - 2y + 2z = 1 \\ (2)\ x + y - z = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} (1)\ 2x + 4y - 2z = -4 \\ (2)\ x + y - z = 1 \\ (3)\ 3x + 3y - 3z = 3 \\ (4)\ 4x + 4y - 4z = 4 \\ (5)\ 5x + 7y - 5z = -1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} (1)\ 3x + 2y + 7z = 1 \\ (2)\ x - 5y + 2z = 8 \\ (3)\ -2x + 10y - 4z = -1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} (1)\ x + y = 5 \\ (2)\ x + y + 2z = 2 \\ (3)\ 2x + y + 2z = 11 \\ (4)\ x + z = 7 \end{cases}$

13. Un campesino cultiva manzanas de tres tipos, A, B y C. De promedio, cada árbol del tipo A produce 50 kg de manzanas por cosecha; cada árbol del tipo B, 30 kg; y cada árbol del tipo C, 40 kg. Sabemos que actualmente obtiene 230 t de manzanas por cosecha y nos proporciona la siguiente información:

- Si arrancara todos los manzanos del tipo B y los sustituyera por manzanos del tipo A, cosecharía 250 t
- Si arrancara todos los manzanos del tipo C, y los sustituyera por manzanos del tipo B, cosecharía 200 t

¿Cuántos manzanos de cada clase tiene plantados actualmente?

14. **Resuelve** los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} (1)\ 3x - y + 5z = 2 \\ (2)\ -7y + z = 7 \\ (3)\ 2z = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} (1)\ x + 3y - 2z = 4 \\ (2)\ 3x + 2y + z = 7 \\ (3)\ 4x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

15. **Resuelve** el siguiente sistema utilizando la notación matricial del método de Gauss:

$$\begin{cases} (1)\ -x - 2y + z = -1 \\ (2)\ 2x + 3y - z = 1 \\ (3)\ 3x + 3y + 9z = 6 \end{cases}$$

16. **Averigua** el precio del gel de baño, de la crema de manos y del suavizante en el centro comercial donde compraron las siguientes cuatro personas:

- La primera pagó $ 7,65 por tres geles de baño, dos cremas de manos y un suavizante.
- La segunda pagó $ 7,65 al comprar cuatro geles de baño y tres cremas de manos y devolver un suavizante.
- A la tercera, que compró un gel de baño y devolvió una crema de manos y un suavizante, le devolvieron 95 centavos
- La cuarta pagó $ 2,05 por comprar dos cremas de manos y un suavizante, y devolver un gel de baño.

17. Una editorial puso a la venta tres libros de astronomía A, B y C. El libro A se vendió a $ 28, el B a $ 30 y el C a $ 25. **Calcula** cuántos ejemplares se vendieron de cada uno de los tres libros, sabiendo que:

- La editorial ingresó en total $ 4 280 000
- El libro A se vendió tres veces más que el B.
- El libro C se vendió como el A y el B juntos.

3 Sistemas de inecuaciones lineales

18. **Considera** el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} ① \ 3x - 2y < 5 \\ ② \ x + y \geq -1 \end{cases}$$

Di si los siguientes puntos son solución del sistema:

a. $(0, 0)$ c. $(3, 0)$

b. $(-2, -1)$ d. $(2, -2)$

19. **Representa** las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones.

a. $\begin{cases} ① \ 2x < 3y - 5 \\ ② \ 3(x - 2) < y \end{cases}$

b. $\begin{cases} ① \ \dfrac{5x - y}{2} < 3x \\ ② \ 5(x - 1) - 2(y - 3) < 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} ① \ x > 1 \\ ② \ 2(x - 3) + \ < 5y \\ ③ \ 2x \leq y \end{cases}$

20. **Maximiza** la función $f(x, y) = 2x+3y$, dadas las siguientes restricciones.

$$3x + 6y \leq 24$$
$$2x + y \leq 10$$
$$0 \leq x$$
$$0 \leq y$$

21. **Minimiza** la función $f(x, y) = x + y + 74$ teniendo en cuenta las restricciones siguientes.

$$(10 - x) + (10 - y) \leq 15$$
$$x + y \leq 13$$
$$0 \leq x \leq 10$$
$$0 \leq y \leq 18$$

22. Una empresa fabrica dos clases de tornillos, A y B. En la producción diaria, el número total de tornillos de ambas clases no supera las 3000 unidades. Además, los tornillos de la clase B siempre alcanzan las 1000 unidades, pero su número es inferior al número de tornillos de la clase A más 1000 unidades.

Si los tornillos de la clase A valen 5 centavos de dólar cada uno y los de la clase B valen 4 centavos de dólar la unidad, **calcula** el costo máximo y el costo mínimo de la producción diaria, y **di** cuántos tornillos de cada clase deben fabricarse para alcanzar este máximo y este mínimo.

23. Una tienda especializada en artículos deportivos solicita dos tipos de prendas ligeras, Gekko y Hayate. El fabricante dispone para su confección de 1,5 km de tejido natural y 1 km de tejido sintético. Ambos artículos se confeccionan con 4 m de tejido, pero cada Gekko precisa un 50% de tejido natural, mientras que cada Hayate utiliza un 75% de tejido natural. Si el precio de venta del Gekko es de $ 100 y el del Hayate es de $ 80, ¿qué número de prendas de cada tipo debe suministrar el fabricante a la tienda para conseguir que el importe de la venta sea máximo?

Para finalizar

1 Considera las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & -2 & 8 \\ -7 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & -2 & 8 \\ -7 & -1 & -3 & 4 \\ -5 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = (3, -2{,}5)$$

Realiza, de ser posible, las siguientes operaciones.

AB, BA, ABC, AC, CD, DA, BC + D, BAD

De no ser posible, **explica** por qué.

2 Un comerciante ha vendido 600 pantalones, por los que ha obtenido a cambio $ 37 440. La venta se ha realizado de la siguiente forma:

- Vendió algunos de los pantalones a $ 72 la unidad
- En las rebajas, vendió algunos de ellos con un 20% de descuento
- El resto lo vendió en liquidación, con un descuento del 40% sobre el precio inicial.

Sabiendo que en la temporada de rebajas vendió la mitad que en los otros dos períodos juntos, **calcula** cuántos pantalones vendió durante la liquidación.

3 Una empresa del sector de la alimentación produce tres tipos de bombones A, B y C, que vende a $ 0,3, $ 0,4 y $ 0,5 por unidad, respectivamente. Si la empresa quiere lanzar al mercado una nueva caja de bombones variados que contenga diez unidades y cueste $ 4,5, ¿cuántos bombones de cada clase debe colocar en la caja?

4 Una sociedad limitada decide invertir un millón de dólares en bolsa. Compra acciones de la compañía Áurea, que rinden un 7% anual, y de la compañía Argentia, que rinden un 4% anual.

Los criterios de inversión de la compañía impiden invertir más de $ 600 000 en Áurea y menos de $ 40 000 en Argentia. Además, los socios deciden que la inversión en Áurea, aunque el interés sea mayor, no debe ser superior al doble de la inversión en Argentia.

Determina cómo debe repartir la sociedad el millón de dólares para obtener el máximo beneficio.

5 **Clasifica** y **resuelve**, si es posible, los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} (1)\ 4x - 6y = -28 \\ (2)\ x + y + z = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} (1)\ 2x + 3y - z = 15 \\ (2)\ 2x - y + z = -3 \\ (3)\ x - y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} (1)\ -2x - 4y = 2 \\ (2)\ -8x - 16y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} (1)\ 2x - 5y + 12z = 9 \\ (2)\ 4x - y - 2z = -2 \\ (3)\ 2x + 4y + 10z = -11 \end{cases}$

AUTOEVALUACIÓN

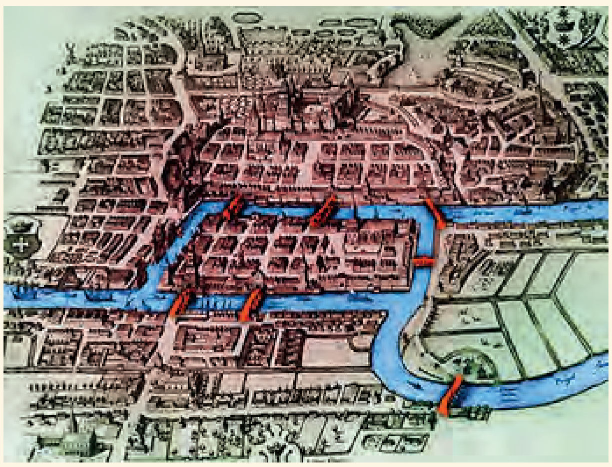
Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

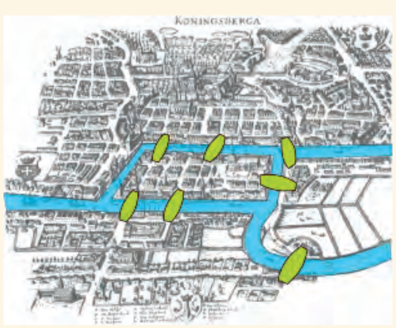
SENTIDO CRÍTICO

Teoría de grafos

La teoría de grafos es una rama de la matemática que estudia problemas relacionados a un conjunto de puntos, y los caminos que los unen.
La ciudad de Königsberg (hoy llamada Kaliningrado), en lo que hoy es Rusia, se encuentra atravesada por el rio Pregolya. La ciudad es famosa por los siete puentes que unen ambos lados de la ciudad con dos de sus islas, como ves en la figura.


http://goo.gl/lBflmz

En el siglo XVIII surgió entre los habitantes de la ciudad un problema con el cual se entretenían. El problema consistía en encontrar una ruta que pase por cada uno de los puentes una sola vez.
El matemático Leonhard Euler resolvió el problema en 1736 haciendo uso de un *grafo* como el que ves en la figura. Él determinó que para poder realizar un camino como el que se indica en el problema, los puntos intermedios del camino deben estar conectados por un número par de líneas. Como en el grafo, tres de los puntos tienen tres caminos de salida, y uno tiene cinco, el camino buscado es imposible.


https://goo.gl/LRKO54

¿En que otro contexto crees que sería útil representar el problema como un grafo?

SOCIEDAD

Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico es un conjunto de números dispuesto de forma cuadrada, tal que al sumar los números de una misma fila, columna o diagonal se obtenga siempre el mismo resultado, llamado el número mágico.
Estas construcciones matemáticas son las predecesoras de las matrices, siendo el cuadrado mágico de Lo Shu el más antiguo conocido, que data del 2200 a. C.
El pintor Alberto Durero grabó, en su obra *Melancolía I*, el cuadrado mágico que ves en la imagen, en el año 1514. ¡Incluso logró colocar el año en el cuadrado mágico! Mira si puedes encontrar todas las formas de obtener el número mágico en este cuadrado.



http://goo.gl/QefepN

SI YO FUERA....

Ingeniero químico

Para calcular la concentración de sustancias necesarias para que una reacción sea optima, los ingenieros químicos deben utilizar fórmulas que pueden ser muy simples o muy complejas. Las fórmulas más simples pueden ser resueltas a mano, pero cuando se necesita utilizar compuestos con moléculas más grandes y complejas, por ejemplo en la industria farmacéutica, los químicos recurren a la programación lineal. Esta permite reducir el problema a uno más simple y resolverlo mediante algoritmos de computadora.

Proyecto

¿QUÉ PASA CON LAS BACTERIAS A MEDIDA QUE EL TIEMPO AVANZA?



http://goo.gl/0nouFU

ELEGIMOS

Recordemos que: Función exponencial de base a es aquella que asigna a la variable independiente x el valor f (x) = ax, donde a es un número real positivo diferente de 1. Nos preguntamos ¿Cuál es la utilidad de la función exponencial.

La función exponencial resulta útil para modelar poblaciones en espacios cortos de tiempo, pero no toma en cuenta el límite de crecimiento que la población encuentre en su medio ambiente, ya sea por tamaño, por la cantidad de alimento, etc.

PLANIFICAMOS

Para modelos de poblaciones en largos intervalos de tiempo, se utiliza la curva logística, cuya derivada es de la forma:

$$P'(t) = \frac{S \cdot k \cdot r \cdot e^{rt}}{(k + e^{rt})^2}$$

donde $P(t)$ es la población en un tiempo determinado t, y tanto k como a dependen del medio de la población.

DESARROLLAMOS

Si empezamos con una muestra de 50 bacterias en una caja Petri cerrada, y sabemos que las bacterias se reproducen siguiendo el modelo dado por la función

$$P'(t) = \frac{(4{,}319892 \times 10^{10})\, e^{0{,}54t}}{(39999 + e^{0{,}54t})^2}$$

1. **Encuentra** los valores de S, k y r
2. **Encuentra** la función $P(t)$.
3. ¿En cuánto tiempo llegará la población a 1000 bacterias? ¿En cuánto tiempo a 20000? ¿Y a $1\ 000\ 000$?
4. Con ayuda de una calculadora, grafica la función en los primeros 50 días (intenta ver hasta donde sube la función). ¿Qué pasa conforme el tiempo avanza?
5. **Calcula** $\lim_{x \to +\infty} P(t)$. ¿Qué puedes decir acerca de L en la curva logística?



Un alto en el camino

1 **Calcula** todos los valores positivos de x que cumplan la siguiente ecuación.

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dt}{t} = \int_{e}^{x} \frac{dt}{t}$$

Demuestra que no se cumple para ningún valor de x.

$$\ln\left(e^{1-x^2} \cdot x^2\right) > 0$$

2 **Considera** una función diferenciable f para valores de x positivos, tal que $f'(x)=(4-x)\,x^{-3}$ para $x > 0$.

a. **Encuentra** la coordenada en x para el valor crítico de f. **Determina** si es un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno.

b. **Encuentra** los intervalos para los cuales f es cóncava

c. Dado que $f(1) = 2$, **determina** la función $f(x)$

3 **Encuentra** el polinomio de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos:

$(-1,16)$, $(1,10)$ y $(2,44)$.

4 **Representa** las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a. $\dfrac{2x - y}{4} < \dfrac{3 - 2x + y}{5}$

b. $\dfrac{x - 6y}{3} < 2y - 5$

c. $\dfrac{x - 3y}{2} - \dfrac{5y - 1}{3} < 0$

d. $\dfrac{2}{3}x - 5(y - 2) < 3(3y - 1)$

e. $3x + 7 - 5(2x - 3) \geq \dfrac{x - 1}{2} - 1$

f. $\dfrac{2x - 3}{8} - \dfrac{5x - 1}{2} < -\dfrac{3x}{4}$

g. $\dfrac{3(x - 1)}{2} - x > \dfrac{x - 3}{2}$

h. $x + 1 \leq \dfrac{x}{4} - x$

5 **Considera** el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} ax - y + z \\ x + 2ay - az = y \\ x + ay - z = 0 \end{array}\right\}$$

a. ¿Para qué valores de a dicho sistema tiene solución no nula?

b. **Determina** las soluciones del sistema para dichos valores de a.

6 **Indica** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si la segunda derivada de una función es positiva, decimos que la función es cóncava.

b. Para que una función sea continua, basta con que el límite exista.

c. Para poder sumar dos matrices, sus dimensiones deben ser iguales.

d. La derivada de la velocidad en función del tiempo es el desplazamiento.

e. Si $f'(x) = 0$, decimos que x_0 es un punto crítico de f.

f. La derivada de $\cos x$ es $\operatorname{sen} x$.

g. Para calcular el área bajo una curva, debemos calcular su integral definida.

h. La matriz identidad es una matriz triangular superior.

i. La derivada de $\frac{1}{x}$ es $\ln x$.

7 **Selecciona** la opción correcta.

a. Si una función es continua en un intervalo $[a, b)$:

- f es continua por la izquierda en $x = b$
- f es continua por la derecha en $x = a$
- f es continua por la izquierda en $x = a$
- f es continua por la derecha en $x = b$

b. La derivada de $\cot x$ es:

- $-\tan x$
- $-\frac{1}{\cos^2 x}$
- $-\frac{1}{\cos x}$
- $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

c. Un sistema de ecuaciones indeterminado:

- Tiene una solución.
- No tiene solución.
- Tiene infinitas soluciones.
- Tiene un número finito de soluciones.

4 Vectores en el espacio



CONTENIDOS:



http://goo.gl/BQeEns

Libro:

Planilandia: Una novela de muchas dimensiones es una novela corta escrita por Edwin Abbott en 1884. En esta obra se realiza una sátira de la jerarquía social haciendo uso de un mundo y figuras en dos dimensiones. ¿Conoces alguna otra obra que se desarrolle en dos dimensiones?

EN CONTEXTO:

Para localizar un objeto en el espacio, es necesario situarlo en un sistema de referencia. De igual manera que con vvel plano, los vectores de tres dimensiones constituyen un recurso para posicionar objetos en el espacio.

Un satélite es cualquier objeto que orbita alrededor de otro, que se denomina principal. Los satélites artificiales son naves espaciales fabricadas en la Tierra y enviadas en un vehículo de lanzamiento, un tipo de cohete que envía una carga útil al espacio exterior. Los satélites artificiales pueden orbitar alrededor de lunas, cometas, asteroides, planetas, estrellas o incluso galaxias. Tras su vida útil, los satélites artificiales pueden quedar orbitando como basura espacial. Estos artefactos son muy útiles para el hombre moderno, son los protagonistas principales de las comunicaciones en el mundo; gracias a ellos, recibimos señales de televisión, de radio y teléfono, o tenemos información valiosa del clima, de nuestro medio ambiente y del espacio.

Salas, Leslie. (2011.10.25). Los satélites espaciales. El espacio sideral. *Extraído el 1 de septiembre de 2015 desde la página web: http://leslie-salas.blogspot.com.*

1. VECTORES

Existen magnitudes, como la temperatura, el tiempo o la masa, que quedan determinadas completamente por un número: son las magnitudes escalares.

En cambio, otras, como la velocidad o la fuerza, necesitan, además, de una dirección y un sentido para quedar completamente determinadas: son las magnitudes vectoriales.

A estas las representamos matemáticamente mediante vectores.

Vectores fijos

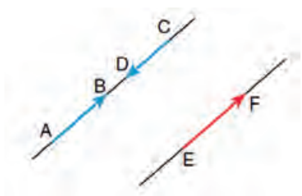
> Dados dos puntos A y B del espacio, denominamos vector de origen A y extremo B al par ordenado (A,B), representados por $\overrightarrow{AB}$.

Así pues, todo vector fijo posee una dirección, una magnitud y un sentido.

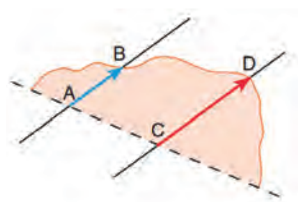
- La dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que pasa por A y B.
- La magnitud o módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la magnitud del segmento AB. Representamos con $|\overrightarrow{AB}|$.
- El sentido del vector $(\overrightarrow{AB})$ es el que se define sobre la recta cuando nos trasladamos de A a B.

Y TAMBIÉN: ¿?

- Dos vectores fijos no nulos tienen la misma dirección si están sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.



- Dos vectores fijos no nulos con la misma dirección y que no están sobre la misma recta tienen el mismo sentido cuando sus extremos están en el mismo semiplano de los dos que determina la recta que pasa por sus orígenes.



1.1. Equipolencia de vectores

Los vectores representados en la figura 1 tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido. Diremos que son equipolentes.

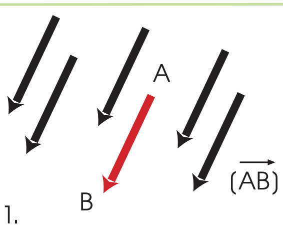


Fig. 1.

> Dos vectores fijos son equipolentes si tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido.

Analiza que dado cualquier vector $\overrightarrow{AB}$ y cualquier punto C, existe un único vector con origen en C y equipolente a $\overrightarrow{AB}$, y un único vector con extremo en C y equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

1.2. Vectores libres

La relación de equipolencia permite clasificar el conjunto de vectores fijos del espacio en colecciones de vectores, cada una de las cuales estará formada por todos los vectores fijos equipolentes a uno dado. Cada colección constituye un vector libre.

> Se denomina vector libre al conjunto de vectores fijos equipolentes a uno dado.

Cada uno de los vectores fijos que componen un vector libre es un representante de este vector.

Dirección, módulo y sentido de un vector libre

Puesto que un vector libre está formado por vectores fijos equipolentes y éstos tienen todos la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido, podemos hablar de la dirección, el módulo y el sentido de un vector libre.

> Se denomina dirección, módulo y sentido de un vector libre a la dirección, el módulo y el sentido de uno cualquiera de sus representantes

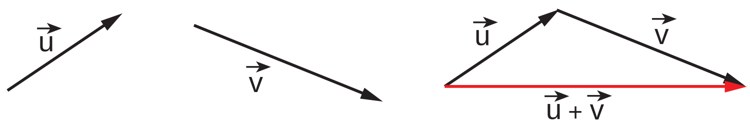
2. OPERACIONES CON VECTORES

En el conjunto de vectores en el espacio, que llamaremos $\mathbb{R}^3$, definimos dos operaciones.

2.1. Adición de vectores

Llamamos suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y lo representamos por $\vec{u} + \vec{v}$, al vector que obtenemos del siguiente modo:

- Tomamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$.
- Trazamos el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y cuyo extremo es el de $\vec{v}$.



Propiedades

- Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Elemento neutro: Es el vector nulo que representamos por $\vec{0}$.

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

- Elemento opuesto: Todo vector $\vec{u}$ tiene un elemento opuesto, $-\vec{u}$, que es el vector de la misma dirección y el mismo módulo, pero de sentido opuesto.

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

La existencia de elemento opuesto para la suma de vectores permite restar vectores. Así, dados dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\vec{u} - \vec{v}$ basta con construir el vector $-\vec{v}$ y sumárselo a $\vec{u}$, tal y como indicamos en la figura 2.

Observa en la figura 3 que, si colocamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con origen común y completamos un paralelogramo, obtenemos fácilmente los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$. A este método para sumar dos vectores lo conocemos como regla del paralelogramo.

Y TAMBIÉN: ¿?

El conjunto de los vectores libres del espacio, $\mathbb{R}^3$, con la operación de la adición es un grupo conmutativo. Además, el producto de vectores por un número real cumple las propiedades P_1, P_2, P_3 y P_4. Decimos, entonces, que el conjunto $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

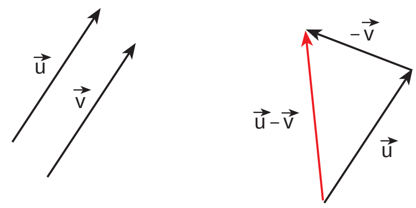


Fig. 2.

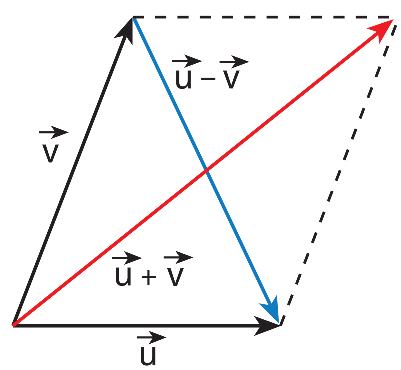
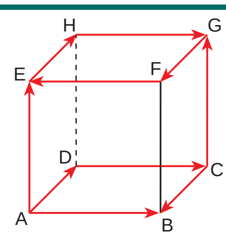


Fig. 3.

Actividades

1. En el cubo de la figura hay representados 10 vectores fijos diferentes.

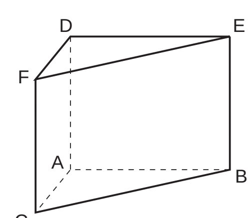
   Agrúpalos en conjuntos de vectores equipolentes.



2. ¿Cuántos vectores fijos distintos y cuántos vectores libres determinan los cuatro vértices de un rectángulo?

3. **Escribe** los 36 vectores fijos distintos que determinan los seis vértices del prisma triangular de la figura.

   ¿Cuántos vectores libres lo determinan?

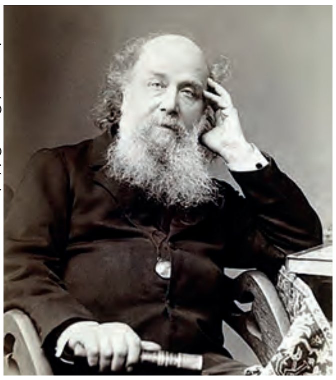


4. ¿Cuántos vectores fijos distintos y cuántos vectores libres determinan los cuatro vértices de un tetraedro?

Y TAMBIÉN: ¿?

Como, $(u + v) + w = u + (u+ w)$, en lo sucesivo escribiremos simplemente $u + v + w$.

Y TAMBIÉN: ¿?



http://goo.gl/AE4qan

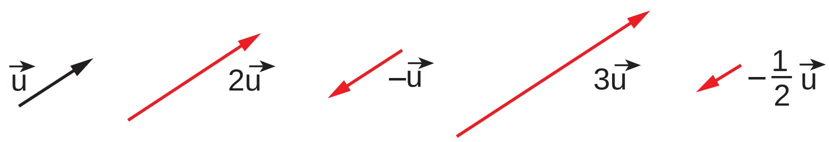
James Joseph Sylvester
Nació el 3 de septiembre de 1814 en Londres, Inglaterra. Realizó los estudios primarios en Londres y los secundarios, en el Instituto Real en Liverpod. En 1833, ingresó a la Universidad St John en Cambridge.
Matemático británico, profesor en las universidades de Londres, Baltimore y Oxford. En colaboración con el amigo A. Cayley, estableció la teoría de las invariantes algebraicas y la de los determinantes. Descubrió un método para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones y creó un importante vocabulario matemático. Fue además fundador del American Journal of Mathematics.

2.2. Multiplicación por un número real

Es posible multiplicar un vector por un número real $k \in \mathbb{R}$, al que llamamos un escalar para diferenciarlo de un vector. En efecto, al multiplicar el vector $\vec{u}$ por el escalar 2, obtenemos el vector $2\vec{u}$ que es igual a $\vec{u} + \vec{u}$. Este vector tiene la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ pero es el doble de largo.

En general llamamos producto de un escalar k por un vector $\vec{u}$, y lo representamos por $k\vec{u}$, al vector libre que tiene:

- La misma dirección que $\vec{u}$.
- El módulo de $\vec{u}$ multiplicado por el valor absoluto de k.
- El sentido de $\vec{u}$, si k es positivo, u opuesto a $\vec{u}$, si k es negativo.



Propiedades $\forall k, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \wedge \vec{u}, \vec{v}$ vectores se cumple que:

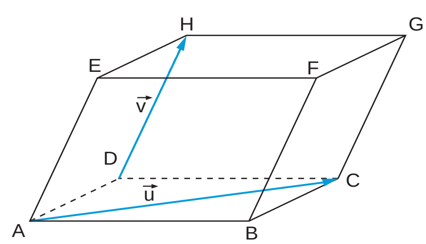
- Distributiva vectorial: $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- Distributiva respecto a la suma escalar: $(k_1 + k_2)\,\vec{u} = k_1\,\vec{u} + k_2\vec{u}$
- Asociativa respecto al producto escalar: $k_1\,(k_2\,\vec{u}) = (k_1\,k_2)\vec{u}$
- Escalar neutro: $1\vec{u} = \vec{u}$

Ejemplo 1

Sea el paralelepípedo ABCDEFGH y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, **efectúa** las siguientes operaciones:

a. $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

b. $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$



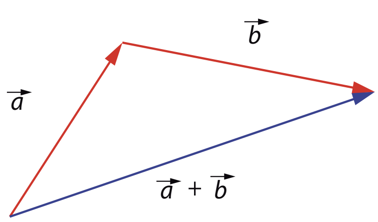


Fig. 4.

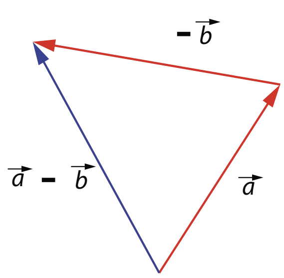


Fig. 5.

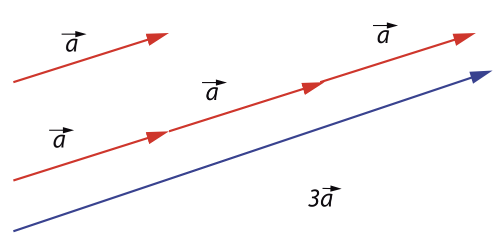


Fig. 6.

Ejemplo 2

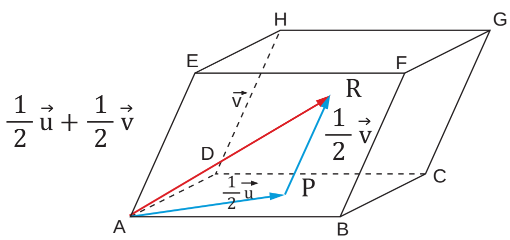
a. Sea P el centro de la cara ABCD y R el centro del paralelepípedo, tomamos $\overrightarrow{AP}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $\overrightarrow{PR}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{v}$. Entonces:

$$\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR}$$

Podemos comprobar que, si tomamos otros vectores para representar $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el resultado siempre es equipolente a $\overrightarrow{AR}$. Así, por ejemplo, si S es el punto medio de la arista $\overrightarrow{CG}$ y tomamos $\overrightarrow{PC}$ como representante de $\frac{1}{2}\vec{u}$ y CS como representante de $\frac{1}{2}\vec{v}$, tenemos:

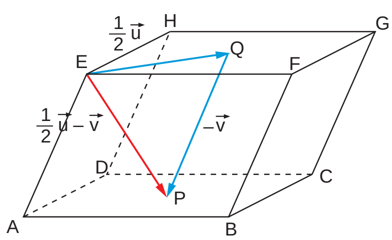
$$\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{PS}$$

Pero $\overrightarrow{PS}$ es equipolente a $\overrightarrow{AR}$. Entonces, vemos que el resultado no depende de los vectores representantes escogidos.

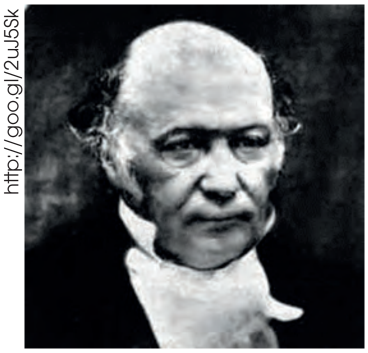


b. Sea P el centro de la cara ABCD y Q el centro de la cara EFGH, tomamos $\overrightarrow{EQ}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $\overrightarrow{QP}$ como representante del vector opuesto de $\vec{v}$, con origen en el extremo de $\overrightarrow{EQ}$. Entonces:

$$\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{EP}$$



Y TAMBIÉN: ¿?



http://goo.gl/2uJ5Sk

Hamilton, William Rowan (1805 -1865).

Matemático irlandés, nacido en Dublín en el año 1805. Descubrió y desarrolló la teoría de los cuaternios. Fue un niño prodigio en muy diversas áreas de las letras y las ciencias. A muy temprana edad, apenas había cumplido los trece años, dominaba más de una docena de idiomas, y varios años antes había mostrado ya interés por la literatura matemática clásica, por los estudios de Newton y Laplace, entre otros. Ingresó en el Trinity College de Dublín y obtuvo la calificación máxima en griego y en física matemática.

Un cuaternio es un número de la forma $ae + bi + cj + dk$, con a,b,c,d números reales. Los números complejos se han construido a partir de un espacio vectorial de dos dimensiones. Sin embargo, los cuaternios pertenecen a un espacio vectorial de cuatro dimensiones reales.

Actividades

5. En el prisma de la figura, $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{AD}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{AE}]$. **Halla** en forma gráfica:

a. $\vec{u} + \vec{w}$

b. $\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

c. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

d. $\vec{v} - \vec{w}$

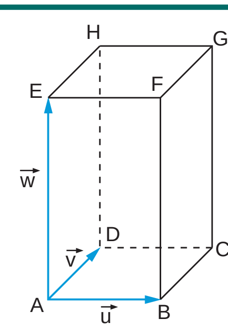
e. $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$

f. $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

g. $\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

h. $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$

i. $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$



3. EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^3$

Sabemos ya que, para ubicar un punto en el plano, necesitamos un par ordenado (a, b) para representarlo, donde a es la coordenada en el eje x, y b es la coordenada en el eje y. Por este motivo decimos que un plano tiene dos dimensiones.

Para ubicar un punto en el espacio, necesitamos tres números. A cualquier punto en el espacio lo representamos mediante una terna ordenada (a, b, c) de números reales. Para representar puntos en el espacio, escogemos un punto fijo O al que llamamos el *origen*, y pasamos tres líneas perpendiculares entre sí, a las que llamamos los *ejes coordenados*. Estos son el eje x, el eje y y el eje z. Usualmente pensamos en los ejes x e y como los ejes horizontales y el eje z como el eje vertical, como muestra la figura.

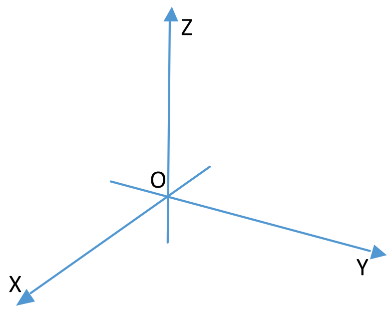


Fig. 7.

Los tres ejes coordenados, a su vez, forman tres planos coordenados. El plano xy es el plano que contiene los ejes x e y. El plano yz contiene los ejes y y z, y el plano xz contiene los ejes x y z.

Para visualizarlo mejor, podemos observar una esquina inferior de cualquier habitación. La pared a tu izquierda es el plano xz, la pared a tu derecha es el plano yz, y el piso es el plano xy.

Ahora, si P es un punto cualquiera en el espacio, a es la distancia perpendicular desde el plano yz al punto P, b la distancia perpendicular desde el plano xz hasta P, y c la distancia perpendicular desde el plano xy hasta P. Representamos P por la terna ordenada (a, b, c) de números reales, y llamamos coordenadas de P a a, b y c. Para ubicar el punto (a,b,c) empezamos en el origen O y nos movemos a unidades por el eje x, después b unidades paralelo al eje y, y finalmente, c unidades paralelo al eje z, como en la figura.

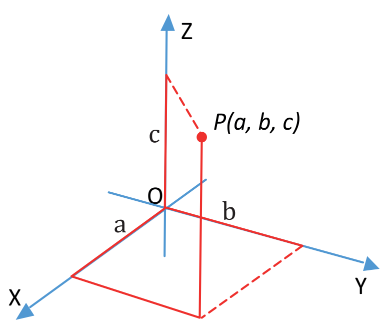


Fig. 8.

Dado que a todo punto en el espacio lo podemos representar por ternas ordenadas de números reales, denotamos al espacio tridimensional por $\mathbb{R}^3$.

Actividades

6. **Ubica** en el espacio los siguientes puntos.

a. $(-5; 3; 1)$
b. $(2; -1; 7)$
c. $(7; 2; 0)$

4. COMPONENTES

Dado un punto P, podemos definir su posición mediante un vector $\overrightarrow{OP}$ que tiene como origen el punto O y como extremo el punto P. Llamamos a este vector el *vector posición de* P. Lo denotamos con $\vec{p}$.

Si el punto P tiene coordenadas (a, b, c), podemos determinar el vector posición $\vec{p}$ utilizando la posición de P de la siguiente manera:

$\vec{p} = (a, b, c)$

Llamamos a estas coordenadas los *componentes del vector* p.

Las coordenadas de un punto *P (a, b, c)* en el espacio son las componentes del vector de posición de *P.*

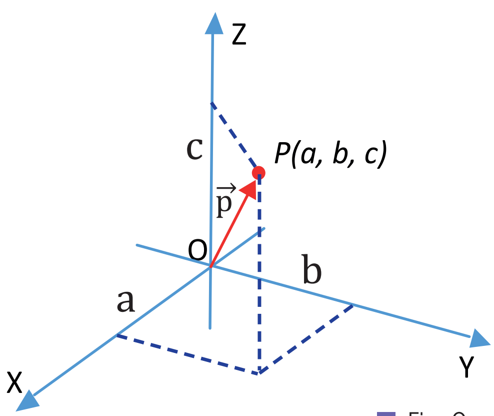


Fig. 9.

Ahora, podemos definir vectores únicos basados en sus componentes. Por ejemplo, definimos los siguientes vectores:

$$\vec{i} = (1; 0; 0) \qquad \vec{j} = (0; 1; 0) \qquad \vec{k} = (0; 0; 1)$$

Llamamos a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ los vectores base de $\mathbb{R}^3$, pues apuntan en la dirección positiva de los ejes X, Y y Z.

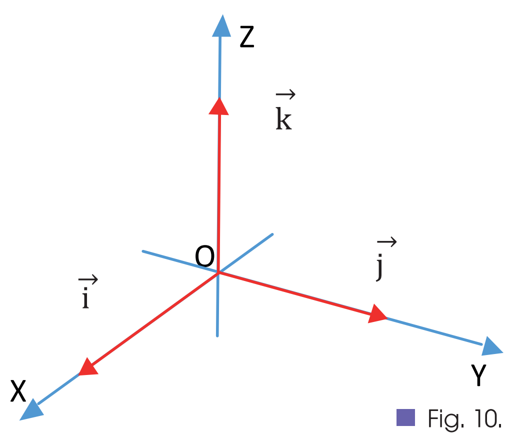
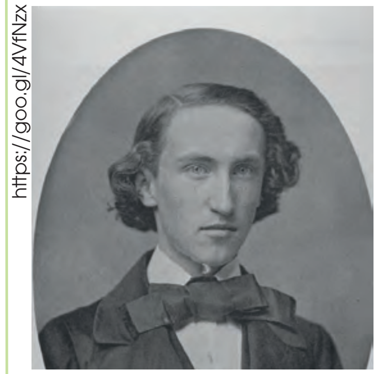


Fig. 10.

Y TAMBIÉN: ¿?



Josiah Willard Gibbs

Físico estadounidense (1839-1903).

Fue profesor de Física en la Universidad de Yale.

En 1881 apareció su Vector Analysis, obra en la que desligó la parte vectorial de la parte escalar en los cuaterniones de Hamilton.

Este trabajo, pensado en principio como un pequeño escrito de difusión académica, marcó el inicio de lo que en la actualidad conocemos como análisis vectorial.

4.1. Operaciones con componentes

Veamos qué sucede con las componentes de los vectores cuando los sumamos o multiplicamos por un escalar.

Adición	Multiplicación por un escalar
Los componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ son $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ y $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ respectivamente. Expresamos la suma de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ como la suma entre cada componente: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$	Las componentes del vector $\vec{u}$ en $\mathbb{R}^3$ es $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$. Expresamos la multiplicación del vector $\vec{u}$ por un escalar real k, $k\vec{u}$: $k\vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$

Tabla 1.

Ejemplo 3

Los componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2,1,5)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 3)$. Hallemos las componentes de $\vec{u} + \vec{v}$, $5\vec{u}$ y $3\vec{u} - 4\vec{v}$

1. $\vec{u} + \vec{v} = (2; 1; 5) + (-1; 0; 3) = (2 + (-1); 1 + 0; 5 + 3) = (1; 1; 8)$
2. $5\vec{u} = 5 \cdot (2; 1; 5) = (5 \cdot 2; 5 \cdot 1; 5 \cdot 5) = (10; 5; 25)$
3. $3\vec{u} - 4\vec{v} = 3\ (2; 1; 5) - 4\ (-1; 0; 3) = (6; 3; 15) + (4; 0; -12) = (6 + 4; 3 + 0; 15 - 12) = (10; 3; 3)$

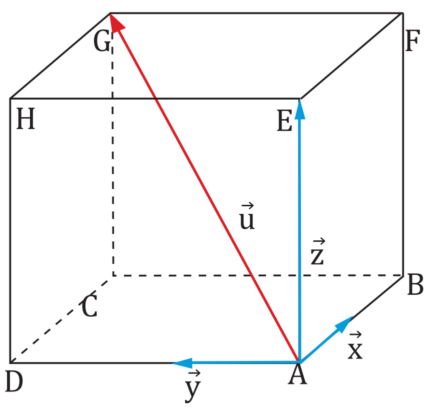


Fig. 11.

4.2. Combinación lineal de vectores

Si combinamos las operaciones de adición y multiplicación por un número real, podemos expresar el vector u de la figura 4 de la siguiente manera:

$$\vec{u} = 2\vec{x} + 2\vec{y} + 1\vec{z}$$

Decimos entonces que el vector u es combinación lineal de los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$.

Dados $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$, diremos que el vector u es combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ si existen $k_1, k_2, ..., k_n$ números reales tales que:

$$\vec{u} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n$$

Actividades

7. **Comprueba** que, realizando una suma mediante el método del paralelogramo, obtienes los mismos resultados que en el ejemplo.
8. Sean $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3, -4)$, $\vec{w} = (5, 2, -1)$ y $\vec{s} = (-6, 3, -5)$. **Encuentra** los números reales a, b y c tal que $s = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
9. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{s}$ en una cierta base de $\vec{V}_3$ son: $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-4, 1, 7)$, $\vec{w} = (0, -2, -5)$ y $s = (-2, -1, -2)$. **Expresa** s como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
10. Las componentes de u, v y w en una cierta base de $\mathbb{R}^3$ son $\vec{u} = (2, 0, -1)$, $\vec{v} = (-3, 1, 2)$ y $\vec{w} = (4, -2, 7)$. **Halla**, en esa misma base, las componentes de:

a. $5\vec{u} + 6\vec{v}$

b. $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

c. $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

4.2. Componentes de un vector determinado por dos puntos

Ahora veremos cómo determinar un vector $\overrightarrow{PQ}$ a partir de las coordenadas de P y Q.

Observa la figura.

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{PQ} = \vec{q}$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$

Si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ tenemos:

$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = (q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3)$

$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

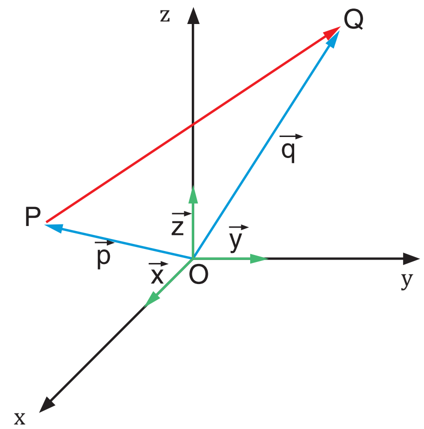


Fig. 12.

4.3. Punto medio de un segmento

Consideremos un segmento en el espacio, de extremos $A = (a_1,a_2,a_3)$ y $B = (b_1,b_2,b_3)$.

Si $M = (m_1, m_2, m_3)$ es su punto medio, se cumple que:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$$

Si calculamos las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AM}$, sustituimos en la igualdad anterior e igualamos componentes, tenemos:

$$(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2, b_3 - a_3) = 2(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3)$$

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 2(m_1 - a_1) \\ b_2 - a_2 = 2(m_2 - a_2) \\ b_3 - a_3 = 2(m_3 - a_3) \end{cases}$$

Si operamos y despejamos m_1, m_2 y m_3, obtenemos:

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \qquad m_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Ejemplo 4

Hallemos las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A = (1, 5, -3)$ y $B = (1, 3, -1)$.
Aplicamos las fórmulas correspondientes y obtenemos:

$m_1 = \frac{1+1}{2} = 1;\ m_2 = \frac{5+3}{2} = 4;\ m_3 = \frac{(-3)+(-1)}{2} = -2$, por lo tanto $M = (1,4,-2)$

Actividades

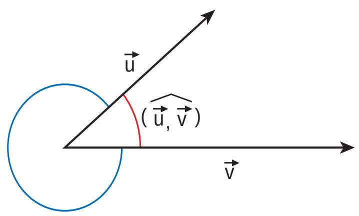
11.Dados los puntos $A = (7, 2, -1)$ y $B = (1, 6, -3)$, **determina** las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$.

12. **Responde**: ¿Cuál será el extremo del vector $\overrightarrow{AB}$ si colocamos su origen en el punto $C = (3, 4, -5)$?

5. PRODUCTO ESCALAR

Y TAMBIÉN: ¿?

El conjunto de los vectores libres del espacio se denota por V_3.



■ Fig. 13.

Y TAMBIÉN: ¿?

El producto escalar de dos vectores es un número real, puesto que $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ son números reales.

Y TAMBIÉN: ¿?

Los vectores de módulo 1 se llaman unitarios.

5.1. Definición

El producto escalar o producto punto, que ya conocemos para los vectores libres del plano, puede definirse de igual manera para los vectores libres del espacio.

Llamamos producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ al número real definido de la siguiente forma:

Si $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3) \Rightarrow$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son no nulos} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ o } \vec{v} \text{ son el vector nulo} \end{cases}$$

siendo $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ el menor de los ángulos que forman las semirrectas que contienen a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como consecuencia de la definición, tenemos:

- El signo de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ depende únicamente del signo de cos $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, puesto que $|\vec{u}|>0$ y $|\vec{v}|>0$.

  Si $0° \leq (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) < 90°$ $\quad \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})>0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}>0.$

  Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 90°$ $\quad \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0.$

  Si $90° < (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) < 180°$ $\quad \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})<0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}<0.$

- En particular, vemos que, si son perpendiculares (u ortogonales), su producto escalar es 0, y viceversa, puesto que $\cos 90° = 0$.

$$\rightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

- Si $\vec{u}=\vec{v}$, entonces:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\,|\vec{u}|\cos 0^{\circ}=|\vec{u}|^2$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

5.2. Propiedades del producto escalar

El producto escalar de dos vectores libres del espacio cumple las siguientes propiedades.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ → Ley conmutativa
2. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$
3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ → Ley distributiva
4. $k(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$, con $k\in\mathbb{R}$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u}=|u|^2$

5.3. Expresión analítica del producto escalar

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, es decir:

$$\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}\,;\ \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

Aplicando las propiedades del producto escalar, tenemos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\vec{k}\,) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\vec{k}\,) =$$
$$= u_1v_1\,\vec{i} \cdot \vec{i} + u_1v_2\,\vec{i} \cdot \vec{j} + u_1v_3\,\vec{i} \cdot \vec{k} +$$
$$+ u_2v_1\,\vec{j} \cdot \vec{i} + u_2v_2\,\vec{j} \cdot \vec{j} + u_2v_3\,\vec{j} \cdot \vec{k} +$$
$$+ u_3v_1\,\vec{k} \cdot \vec{i} + u_3v_2\,\vec{k} \cdot \vec{j} + u_3v_3\,\vec{k} \cdot \vec{k}$$

Dado que $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ son perpendiculares entre ellos:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0\,,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0\,,\ \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Y el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$$

Ejemplo 5

Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (3, -2, 0)$ y $\vec{v} = (3,-2,0)$. Calculemos $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Aplicamos la expresión analítica del producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 0) \cdot (2, 1, -4) = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-4) = 6 - 2 - 0 = 4$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Demostración de la propiedad PE.3 del producto escalar

La interpretación geométrica del producto escalar permite demostrar fácilmente la propiedad PE.3.

Supongamos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están situados como se indica en la figura (se haría análogamente en cualquier otro caso).

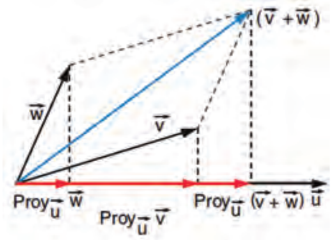


Fig. 14.

Se cumple:

$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} =$

$= |u|\,|Proy_{\vec{u}}\vec{v}| + |u|\,|Proy_{\vec{u}}\vec{w}| =$

$= |u|\,|Proy_{\vec{u}}\vec{v}| + |u|\,|Proy_{\vec{u}}\vec{w}| =$

$= |u|\,|Proy_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w})| =$

$= \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

Módulo de un vector y ángulo entre dos vectores

La expresión analítica del producto escalar permite obtener el módulo de un vector y el coseno del ángulo entre dos vectores en función de sus componentes.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Entonces:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(u_1, u_2, u_3) \cdot (u_1, u_2, u_3)}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(v_1, v_2, v_3) \cdot (v_1, v_2, v_3)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}}$$

Por otro lado:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}| \cdot \cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \Rightarrow \cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|}$$

Si ahora sustituimos $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ por su expresión analítica, obtenemos:

$$\cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}\sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}}}$$

Ejemplo 6

Los componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2, 2, 1)$ y $\vec{v} = (-3, -4, 0)$. Calculemos:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b. $|\vec{u}|$ c. $|\vec{v}|$ d. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Aplicamos la expresión analítica del producto escalar:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 = -14$

b. $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

c. $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

d. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = \dfrac{2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0}} = \dfrac{-14}{15}$

Ejemplo 7

Hallemos un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, -2, -1)$ y de módulo 1.
Sea $\vec{v} = (a, b, c)$ un vector perpendicular a $\vec{u}$. Debe cumplirse que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2, -2, -1) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow 2a - 2b - c = 0$$

Así, cualquier terna de números a, b, c que cumpla la ecuación $2a - 2b - c = 0$ es solución a nuestro problema. En particular, si $c = 0$ y $b = 1$, tenemos:

$$2a - 2 \cdot 1 - 0 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 1$$

Entonces $\vec{v} = (1,1,0)$ es un vector perpendicular a u.
Calculemos el módulo de $\vec{v}$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Si multiplicamos el vector $\vec{v}$ por $\dfrac{1}{|\vec{v}|}$, obtendremos otro vector $\vec{v}'$ de su misma dirección y de módulo 1. Así, un vector perpendicular a $\vec{u}$ y de módulo 1 es:

$$\vec{v}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow \vec{v}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

El *vector* $\dfrac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$ es un vector con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$, con módulo 1. Llamamos a este vector el *vector unitario* de $\vec{u}$.

Actividades

13. Sean los vectores $\vec{u} = (1; -1; 7)$, $\vec{v} = (-2; 0; 5)$ y $\vec{w} = (3; -3; 2)$. **Determina**:

a. $2\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ b. $\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u})$ c. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w})$ d. $|3\vec{u} - 2\vec{v}|$

5.4. Aplicaciones

El producto escalar es una herramienta muy útil para resolver problemas en diferentes campos del conocimiento científico y técnico. Veamos algunos ejemplos.

Geometría

Al producto escalar lo empleamos en geometría para demostrar diversos teoremas.

Ejemplo 8

Utilicemos el producto escalar para demostrar que en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa coincide con la suma de los cuadrados de los catetos (teorema de Pitágoras).
Sea ABC el triángulo rectángulo de la figura, recto en A.

Hemos de ver que $a^2 = b^2 + c^2$.

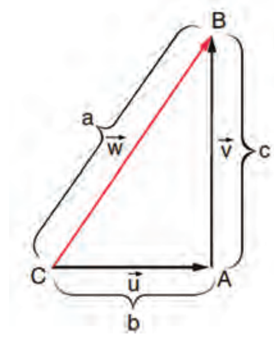
Consideramos $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{CB}$

Así:

$a^2 = |\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) =$

$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 =$



Pero $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, puesto que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Luego:

$$a^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo 9

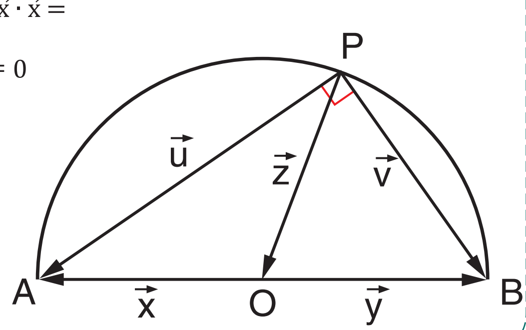
Utilicemos el producto escalar para demostrar que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto (teorema que suele atribuirse a Tales de Mileto).
Sea P un punto cualquiera situado en la semicircunferencia de centro O y radio r de la figura. Comprobemos que los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$ y $\vec{v} = PB$ son perpendiculares, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Consideramos $\vec{x} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{y} = [\overrightarrow{OB}]$ y $\vec{z} = [\overrightarrow{OP}]$:

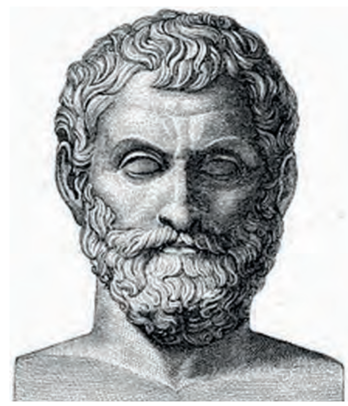
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{z} + \vec{x}) \cdot (\vec{z} + \vec{y}) = (\vec{z} + \vec{x}) \cdot (\vec{z} - \vec{x}) =$

$= \vec{z} \cdot \vec{z} - \vec{z} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{z} - \vec{x} \cdot \vec{x} =$

$= |\vec{z}|^2 - |\vec{x}|^2 = r^2 - r^2 = 0$



Y TAMBIÉN: ¿?



Tales de Mileto
Matemático y filósofo griego (aprox. 624 a. C.- 548 a. C.). Considerado el fundador de las matemáticas griegas, y uno de los siete sabios de Grecia, la tradición le atribuye el descubrimiento de algunos teoremas geométricos, así como la previsión del eclipse solar del año 585 a. C.

Física

En física es frecuente el uso de magnitudes vectoriales que determinamos mediante un módulo, una dirección y un sentido, como la velocidad, la aceleración, la fuerza...

Existen también conceptos en cuya definición interviene el producto escalar. Así, al trabajo, W, realizado por una fuerza $\vec{F}$ ejercida sobre un objeto que se desplaza desde un punto A hasta un punto B lo definimos como el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Ejemplo 10

Un cuerpo se desplaza desde un punto $A = (2, -1, 3)$ hasta un punto $B = (4, 1, -2)$. Calculemos el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F} = (1, 7, 2)$ que se ejerce sobre dicho cuerpo (todas las unidades están expresadas en el sistema internacional).
Calculamos el vector desplazamiento:

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 2;\ 1 - (-1);\ -2 - 3) = (2, 2, -5)$$

Por tanto, el trabajo realizado es:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = (1, 7, 2) \cdot (2, 2, -5) = 1{\cdot}2 + 7{\cdot}2 + 2{\cdot}(-5) = 6\ [\,J\,]$$

Observa: ¿cómo varía el trabajo que realiza una fuerza que actúa sobre un cuerpo en función del ángulo α que forma dicha fuerza con la dirección del desplazamiento del cuerpo.

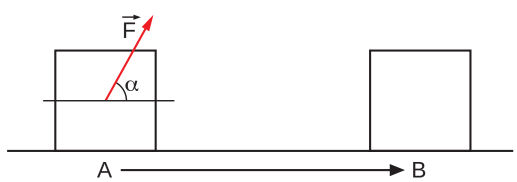
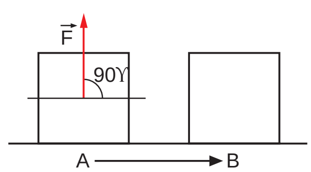
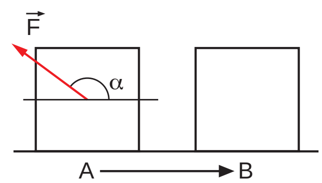
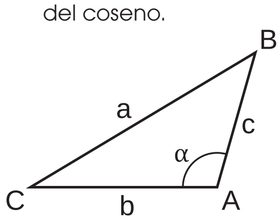
$0° \leq \alpha < 90°$	**$\alpha = 90°$**	**$90° < \alpha \leq 180°$**
		
$W = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos\alpha > 0$	$W = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos 90° =$ $= \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot 0° = 0$	$W = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos\alpha < 0$
El trabajo es positivo y se llama motor, porque favorece el movimiento del cuerpo. Cuando $\alpha = 0°$, el trabajo toma su valor máximo: $W = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos 0° = \lvert\vec{F}\rvert\,\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	El trabajo es nulo. Una fuerza perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo.	El trabajo es negativo y se llama resistente, porque se opone al movimiento del cuerpo.

Tabla 2.

Actividades

14. **Utiliza** el producto escalar para demostrar el teorema del coseno.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

15. Un cuerpo se desplaza desde un punto $A = (3; 2; 1)$ hasta otro punto $B = (4; 1; 0)$. **Halla** el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F} = (8, 4, 2)$ que se ejerce sobre dicho cuerpo (en unidades SI).

6. PRODUCTO VECTORIAL

6.1. Definición

El producto vectorial, o producto cruz, es una operación definida en $\mathbb{R}^3$ que asocia a un par de vectores otro vector en $\mathbb{R}^3$.

Llamamos producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} \times \vec{v}$, al vector de $\mathbb{R}^3$ que definimos de la siguiente forma:

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos:

  Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \text{sen } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

  Dirección: *perpendicular tanto a* $\vec{u}$ *como a* $\vec{v}$.

  Sentido: *siguiendo la ley de la mano derecha.*

- Si $\vec{u} = 0$ o $\vec{v} = 0$, $\vec{u} \times \vec{v} = 0$.

Observa que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ pues $\text{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$.

6.2. Propiedades

El producto vectorial cumple las siguientes propiedades:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
4. $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$, con $k \in \mathbb{R}$

6.3. Expresión analítica

Considera que, de acuerdo a la definición,

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \qquad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

Sean $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ y $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$.

Aplicando las propiedades del producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) =$$
$$= u_1 v_1 (\vec{i} \times \vec{i}) + u_1 v_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + u_1 v_3 (\vec{i} \times \vec{k}) +$$
$$+ u_2 v_1 (\vec{j} \times \vec{i}) + u_2 v_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + u_2 v_3 (\vec{j} \times \vec{k}) +$$
$$+ u_3 v_1 (\vec{k} \times \vec{i}) + u_3 v_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + u_3 v_3 (\vec{k} \times \vec{k})$$

Como $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son perpendiculares entre ellos, y de módulo 1:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_2\vec{k} - u_1 v_3\vec{j} - u_2 v_1\vec{k} + u_2 v_3\vec{i} + u_3 v_1\vec{j} - u_3 v_2\vec{i} =$$
$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

Y TAMBIÉN:

La regla de la mano derecha dicta que, si u y v se representan mediante segmentos con el mismo origen, al alinear tus dedos de la mano derecha con el vector u, y cerrarlos hacia el vector v , tu pulgar apuntará en la dirección del vector $\vec{u} \times \vec{v}$.

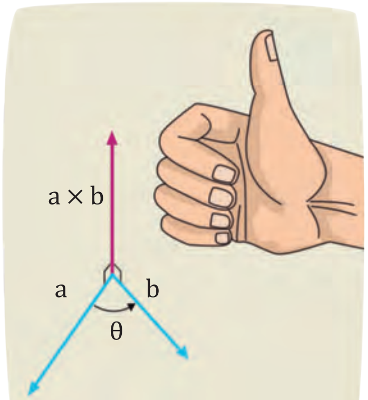


Fig. 15.

Y TAMBIÉN:

Los vectores ortonormales $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ verifican las siguientes relaciones:

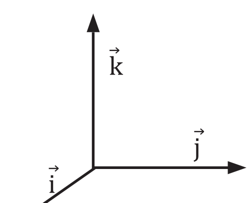


Fig. 16.

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

6.4. Aplicaciones

Y TAMBIÉN: ¿?

Podemos calcular el área de cualquier polígono descomponiéndolo en triángulos.

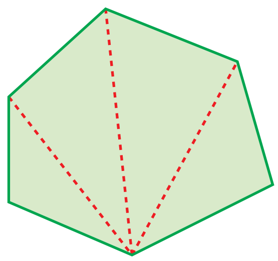


Fig. 17.

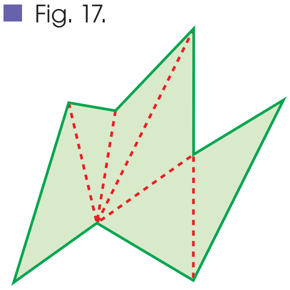


Fig. 18.

El área del polígono será la suma de las áreas de todos los triángulos.

También el producto vectorial resulta de gran utilidad para resolver problemas en diferentes campos del conocimiento científico y técnico. Veamos algunos ejemplos.

Aplicaciones en geometría

Entre ellas, destacan la obtención de un vector perpendicular a dos vectores dados y el cálculo de áreas de figuras planas.

Ejemplo 11

Los componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (0, 3, 4)$ y $\vec{v} = (1, 3, 8)$. Hallemos un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyo módulo sea 5.

- Calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$ puesto que, por definición, es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 3, 4) \cdot (1, 3, 8) =$$
$$= (3 \cdot 8 - 4 \cdot 3)\vec{i} - (0 \cdot 8 - 1 \cdot 4)\vec{j} + (0 \cdot 3 - 1 \cdot 3)\vec{k}$$
$$= 12\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$$

- Por lo tanto, $\vec{w} = (12, 4, -3)$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El módulo de $\vec{w}$ es:

$$|\vec{w}| = \sqrt{12^2 + 4^2 + (-3)^2} = 13$$

Entonces:

$$\vec{w}' = 5 \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{5}{13}\,(12, 4, -3) = \left(\frac{60}{13}, \frac{20}{13}, -\frac{15}{13}\right)$$

es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ de módulo 5.

Ejemplo 12

Sean $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, 5, -1)$ y $C = (-4, 3, -2)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo (fig. 19). Hallemos el área del paralelogramo $ABCD$ y el área del triángulo ABC.

- Según la interpretación geométrica del producto vectorial, si $\vec{u} = BA$ y $\vec{v} = BC$, el área del paralelogramo $ABCD$ es $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Calculemos, pues, $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

$$\vec{u} = [\overrightarrow{BA}] = (1 - 2, 1 - 5, 3 - (-1)) = (-1, -4, 4)$$
$$\vec{v} = [\overrightarrow{BC}] = (-4 - 2, 3 - 5, -2 - (-1)) = (-6, -2, -1)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 4 \\ -6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 25\vec{j} - 22\vec{k}$$

Por tanto, el área, S_p, del paralelogramo es:

$$S_p = |u \times v| = |(12, 25, -22)| = \sqrt{12^2 + (+25)^2 + (-22)^2} =$$
$$= \sqrt{1253} \approx 35{,}4\ u^2$$

- El área del triángulo ABC, S_t, es la mitad de la del paralelogramo $ABCD$, luego:

$$S_t = \frac{1}{2}\ S_p = \frac{1}{2}\sqrt{1253} \approx 17{,}7\ u^2$$

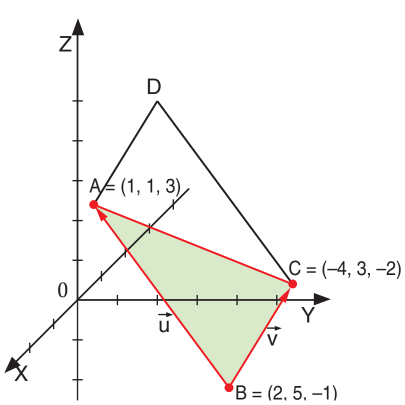


Fig. 19.

Aplicaciones en física

Entre las muchas aplicaciones que el producto vectorial tiene en física, destacaremos las siguientes:

Dinámica

Momento de una fuerza

El momento de una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto A, respecto a un punto O, es el vector $\vec{M}$ definido por

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$$

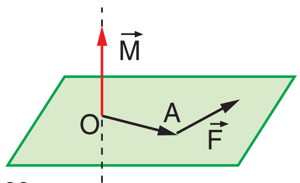


Fig. 20.

Ejemplo

Calculemos el momento de la fuerza $\vec{F} = (4, -2, 7)$ [N] aplicada en el punto $A = (2, -3, 1)$, respecto al punto $O = (1, 1, 2)$.

Calculamos el vector $\overrightarrow{OA}$ y hallamos $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$:

$$\overrightarrow{OA} = (2 - 1, -3 - 1, 1 - 2) = (1, -4, -1)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = -30\vec{i} - 11\vec{j} + 14\vec{k}$$

Por tanto, $\vec{M} = (-30, -11, 14)$.

Momento cinético

El momento cinético de una partícula de masa m con una velocidad $\vec{v}$ en un punto A, respecto de un punto O, es el vector $\vec{L}$ definido por:

$$\vec{L} = m\,(\overrightarrow{OA} \times \vec{v})$$

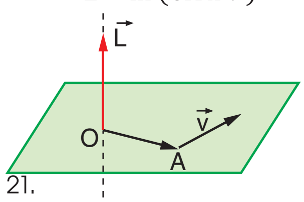


Fig. 21.

Ejemplo

En cada instante t, una masa de 3 kg se encuentra en el punto $A = (2t + 1, 3t - 2, 2t)$ y tiene una velocidad $\vec{v} = (2, 3, 2)$. Hallemos el momento cinético respecto al punto $O = (1,1,1)$.

Calculamos el vector $\overrightarrow{OA}$, y hallamos $[\overrightarrow{OA}] \times \vec{v}$:

$$[\overrightarrow{OA}] = (2t, 3t - 3, 2t - 1)$$

$$[\overrightarrow{OA}] \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 3t - 3 & 2t - 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} -3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

Así, $\vec{L} = m\,([\overrightarrow{OA}] \times \vec{v}) = 3\,(-3, -2, 6) = (-9, -6, 18)$.

Electromagnetismo

Fuerza magnética

Cuando una carga q, que se mueve a velocidad $\vec{v}$, penetra en el interior de un campo magnético de intensidad $\vec{B}$, se ve sometida a una fuerza magnética $\vec{F}$ tal que:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

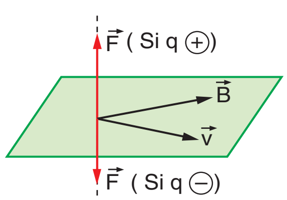


Fig. 22.

Ejemplo

Halla la fuerza que actúa sobre una carga de 3 C situada en un campo magnético de intensidad $\vec{B} = (1, 2, -1)$ si su velocidad es $v = (3, 1, 0)$.

Hallamos $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = (-1, 3, 5)$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

Por tanto:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) = 3 \cdot (-1, 3, 5) = (-3, 9, 15)$$

Tabla 3.

Actividades

16. **Halla** un vector de módulo 2 perpendicular a $\vec{u} = (8, 1, 0)$ y a $\vec{v} = (4, 1, 1)$.

17. **Determina** la fuerza que actúa sobre una carga de 10 C situada en un campo magnético de intensidad $\vec{B} = (1, 5, -3)$, si su velocidad es $\vec{v} = (5, 7, -2)$.

7. PRODUCTO MIXTO

7.1. Definición

El producto mixto es una operación definida en $\mathbb{R}^3$ que asocia a tres vectores libres un número real. Lo definimos a partir del producto escalar y del producto vectorial que ya conocemos.

> Llamamos producto mixto de tres vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ al número real definido de la forma:
>
> $$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

El producto mixto será 0 si:

- $\vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$, es decir, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos.
- $\vec{u} \perp (\vec{v} \times \vec{w})$

7.2. Propiedades del producto mixto

El producto mixto de tres vectores libres del espacio cumple las siguientes propiedades:

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -\vec{u} \,.\, (\vec{w} \times \vec{v}) = -\vec{v} \,.\, (\vec{u} \times \vec{w}) = -\vec{w} \,.\, (\vec{v} \times \vec{u})$
3. $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -\,(\vec{u}_1(\vec{v} \times \vec{w})) + (\vec{u}_2 \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
4. $k(\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})) = k\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times k\vec{w})$, con $k \in \mathbb{R}$.

7.3. Interpretación geométrica

Sean $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores linealmente independientes, y consideremos el paralelepípedo $ABCDEFGH$ construido sobre ellos. Se cumple que:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}| \cos \alpha$$

Pero ya sabemos que $|\vec{v} \times \vec{w}|$ es el área de la base $ABCD$, y por la definición de $\cos \alpha$:

$$|\vec{u}| \cos \alpha = h$$

Por tanto podemos escribir:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \text{volumen de } ABCDEFGH$$

Podemos enunciar que:

> El valor absoluto del producto mixto de $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ coincide con el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos.

Y TAMBIÉN: ¿?

Si los vectores u y $v \times w$ forman un ángulo obtuso, el volumen del paralelepípedo construido sobre u, v y w, y coincide con el del paralelepípedo construido sobre $-u$, v y w.

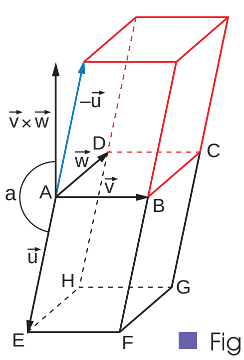


Fig. 23.

Puesto que $-u$ y $v \times w$ forman un ángulo agudo, se tiene:

volumen de $ABCDEFGH =$
$= [-u, v, w] = -[u, v, w]$

7.4. Expresión analítica

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores cuyas componentes son $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Es decir:

$$\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}$$

$$\vec{w} = w_1\,\vec{i} + w_2\,\vec{j} + w_3\,\vec{k}$$

Aplicando la definición de producto mixto y las expresiones analíticas del producto escalar y del producto vectorial obtenemos:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right) =$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 13

Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 5, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 2)$.

Calcula $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

Aplicamos la expresión analítica del producto mixto:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(5\cdot 2 - 1\cdot 1) + 1\,(-2\cdot 2 - 1\cdot 1) + 2\,(-2\cdot 1 - 1\cdot 5) = 27 - 5 - 14 = 8$$

Actividades

18. Sean $\vec{u} = (1, -2, 5)$, $\vec{v} = (4, 0, -5)$, $\vec{w} = (2, 1, 1)$ y $\vec{t} = (3, 2, 1)$.

Calcula.

a. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$
b. $\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{t})$
c. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{t})$
d. $\vec{u}\cdot(2\vec{v}\times(\vec{t}-\vec{v}))$

Y TAMBIÉN: ¿?

Notación matemática
El símbolo $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}|$, equivalente a det $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, se utiliza para representar el determinante cuyas filas son las componentes de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

TIC

Notación matemática
Si accedes a la página podrás reforzar y ampliar tus conocimientos sobre álgebra vectorial. Además, podrás utilizar calculadoras «vectoriales» que permiten resolver los diferentes productos entre vectores.

Visita:

www.ciencialab.com/mod/resource/index. php?id=3,

7.5. Aplicaciones del producto mixto

El producto mixto es muy útil en geometría para calcular volúmenes de poliedros. Veamos algunos ejemplos.

Y TAMBIÉN: ¿?

La expresión del volumen de un tetraedro en función de la superficie de su base, S_t, y de su altura, h_t, es:

$$V_t = \frac{1}{3} S_t h_t$$

Sea ABCD un tetraedro cualquiera, y consideremos el paralelepípedo que determinan los vectores $[\overrightarrow{AB}]$, $[\overrightarrow{AC}]$ y $[\overrightarrow{AD}]$.

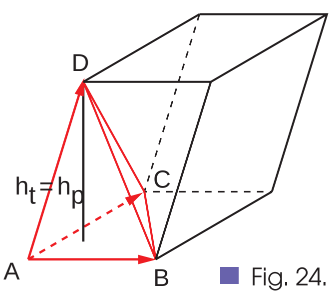


Fig. 24.

Observamos que:

- La superficie de la base del tetraedro, St , es la mitad de la superficie de la base del paralelepípedo, Sp:

$$S_t = \frac{1}{2} S_p$$

- El paralelepípedo y el tetraedro tienen la misma altura:

$$h_t = h_p$$

Si sustituimos estos valores en la expresión del volumen del tetraedro, tenemos:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_p h_p = \frac{1}{6} V_p$$

Vemos, pues, que el volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del volumen del paralelepípedo definido por $[\overrightarrow{AB}]$, $[\overrightarrow{AC}]$ y $[\overrightarrow{AD}]$.

Ejemplo 14

Halla el volumen del paralelepípedo ABCDEFGH sabiendo que las coordenadas de los vértices A, B, D y E son $A = (5, 3, -3)$, $B = (3, 4, -2)$, $D = (4, -1, -3)$ y $E = (5, 1, 3)$.

Determinamos las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$, y aplicamos la expresión analítica del producto mixto:

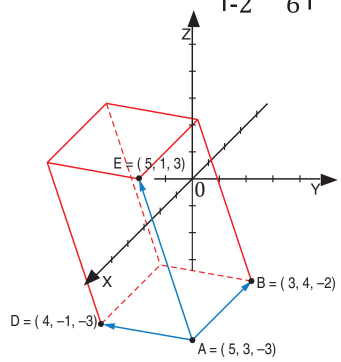
$\overrightarrow{AB} = (3 - 5, 4 - 3, 2 - (-3)) = (-2, 1, 1)$

$\overrightarrow{AD} = (4 - 5, -1 - 3, -3 - (-3)) = (-1, -4, 0)$

$\overrightarrow{AE} = (5 - 5, 1 - 3, 3 - (-3)) = (0, -2, 6)$

Así pues, el volumen del cuerpo está dado por

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE}) = -2\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 56u^3$$



Ejemplo 15

Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son $A = (1, 1, -5)$, $B = (3, 3, -2)$, $C = (2, -3, -1)$ y $D = (1, 2, 3)$.

Determinamos las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, y aplicamos la expresión analítica del producto mixto:

$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 3 - 1, -2 - (-5)) = (2, 2, 3)$

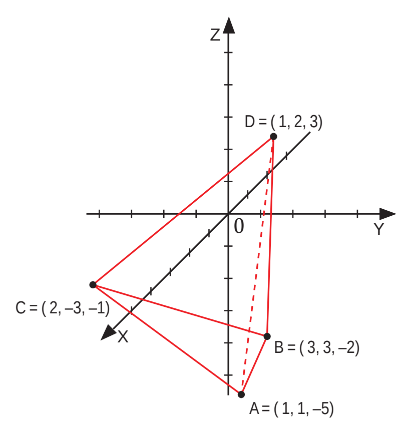
$\overrightarrow{AC} = (2 - 1, -3 - 1, -1 - (-5)) = (1, -4, 4)$

$\overrightarrow{AD} = (1 - 1, 2 - 1, 3 - (-5)) = (0, 1, 8)$

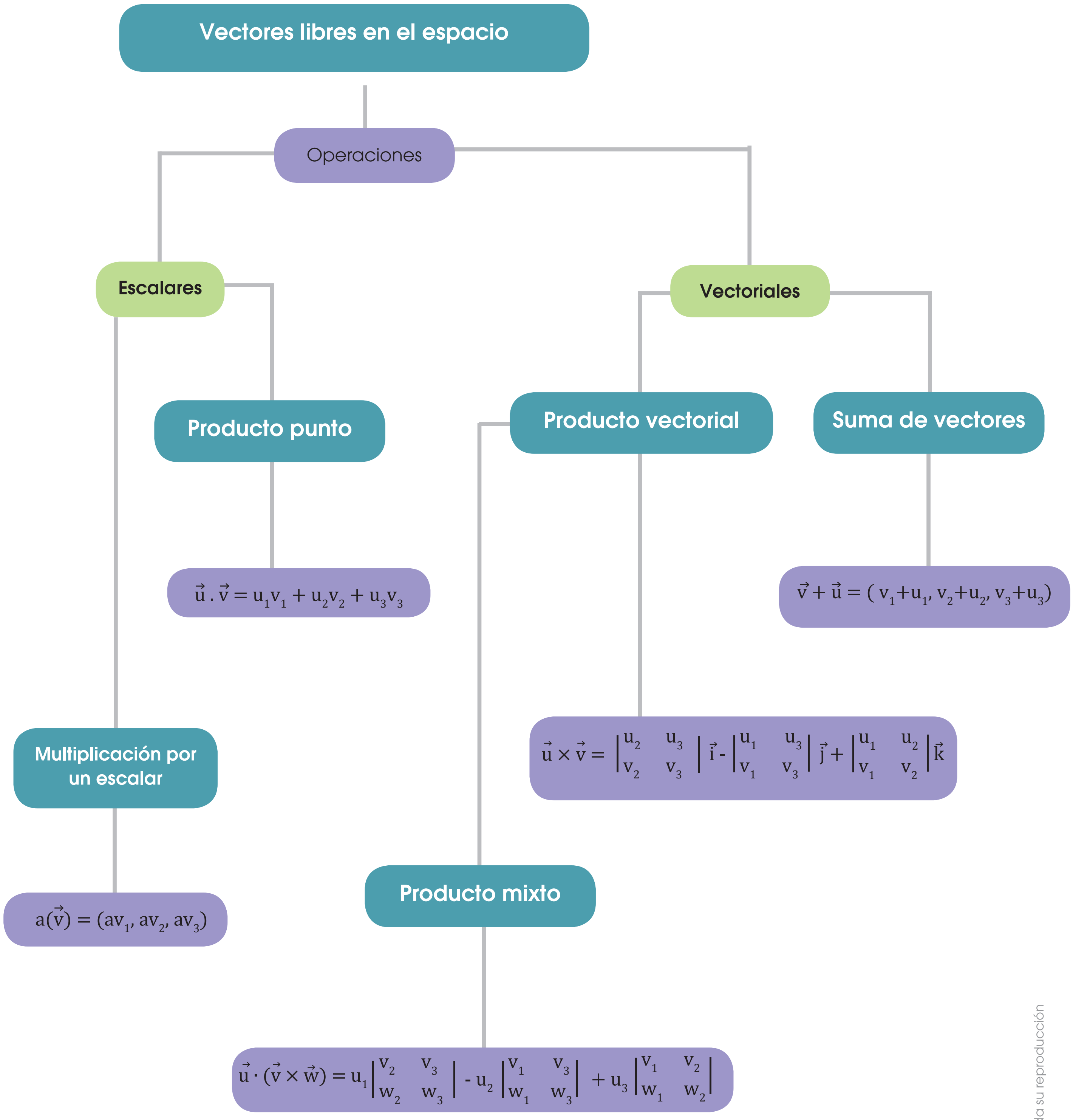
$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 2\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -53$$

Y sabemos que el volumen del tetraedro es:

$$V_t = \frac{1}{6} V_p = \frac{1}{6} |-53| = \frac{53}{6} u^3$$



4 Resumen


Vectores libres en el espacio
Operaciones
Escalares
Vectoriales
Producto punto
Producto vectorial
Suma de vectores
$\vec{u} \,.\, \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
$\vec{v} + \vec{u} = (v_1+u_1, v_2+u_2, v_3+u_3)$
Multiplicación por un escalar
$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$
Producto mixto
$a(\vec{v}) = (av_1, av_2, av_3)$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$

A

1. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = \sqrt{3}$ y $|\vec{v}| = 4$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 30°, **halla**.
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$
   b. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$
   c. $|\vec{u} - \vec{v}|$ y $|2\vec{u} - \vec{v}|$
   d. El ángulo que forman $\vec{u} - \vec{v}$ y $2\vec{u} - \vec{v}$

Solución

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 30° = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$

b. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot 2\vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot 2\vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$

$= |\vec{u}||2\vec{u}| \cos 0° - |\vec{u}||\vec{v}| \cos 30° - |\vec{v}||2\vec{u}| \cos 30° + |\vec{v}||\vec{v}| \cos 0°$

$= \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot 4 \cdot 1 =$
$6 - 6 - 12 + 16 = 4$

c. $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$

$= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= |\vec{u}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2 =$

$= 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 = 7$

d. Aplicamos la expresión analítica del ángulo entre dos vectores y utilizamos el resultado de los apartados b y c:

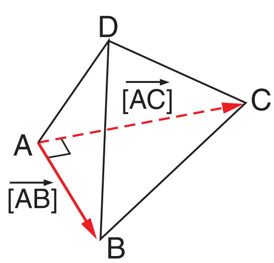
$$\cos \propto = \frac{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})}{|\vec{u} - \vec{v}| \cdot |2\vec{u} - \vec{v}|}$$

$$\cos \propto = \frac{4}{\sqrt{7} \cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \propto = 40{,}89°$$

2. Dados los puntos $A = (1, x, -2)$, $B = (y, 1, -1)$, $C = (2, x, -3)$ y $D = (1, 2, 3)$, halla el volumen del tetraedro ABCD, sabiendo que la cara ABC es un triángulo rectángulo isósceles, recto en A.

Solución

Representamos los datos del enunciado en una figura



Consideraremos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (y - 1, 1 - x, -1 - (-2)) = (y - 1, 1 - x, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (2 - 1, x - x, -3 - (-2)) = (1, 0, -1)$

Imponemos las condiciones del enunciado para hallar los valores de x e y:

- Por ser ABC un triángulo rectángulo, recto en A, se debe cumplir que: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, o lo que es lo mismo: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (y - 1)1 + (1 - x) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 0$

  $\Rightarrow y - 2 = 0 \qquad (1)$

- Por ser ABC, además, isósceles, sus dos catetos miden lo mismo, es decir, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$. Así:

$\sqrt{(y - 1)^2 + (1 - x)^2 + 1^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}$

$y^2 - 2y + 1 + 1 - 2x + x^2 + 1 = 1 + 1$

$y^2 - 2y + x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2), se obtiene: $x = 1$, $y = 2$.

Entonces, las coordenadas de los puntos A, B, C, y D son:

$A = (1, 1, -2)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (2, 1, -3)$, $D = (1, 2, 3)$

Y por consiguiente, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son:

$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 5)$

Calculemos finalmente el volumen del tetraedro ABCD, V_t, utilizando la expresión analítica del producto mixto:

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto, el volumen del tetraedro es:

$$V_t = \frac{1}{6} V_p = \frac{1}{6} |2| = \frac{1}{3}$$

Ejercicios y problemas

1 Vectores en el espacio

1. Sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ representados en la figura. **Halla** gráficamente:

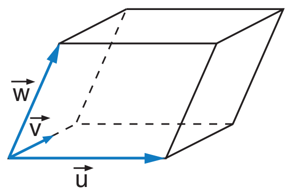
   a. $\vec{u}+\vec{v}$

   b. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

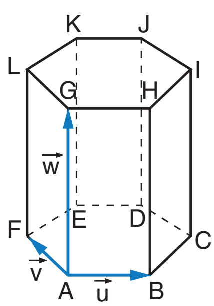
   c. $\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

   d. $\vec{u}+2\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

   e. $\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$



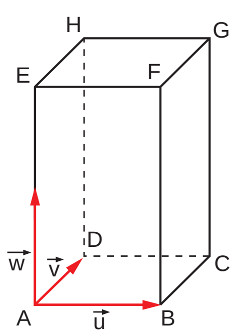
2. Considera los vectores de la figura. Sea Q el centro del prisma, M el centro de la cara $ABHG$, N el centro de la cara $ABCDEF$ y P el centro de la cara $GHIJKL$.



Expresa los vectores $[\overrightarrow{AM}]$, $[\overrightarrow{AN}]$, $[\overrightarrow{AP}]$, $[\overrightarrow{AQ}]$ y $[\overrightarrow{GJ}]$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

3. En este prisma de base cuadrada, la arista lateral es el doble de la arista básica.

   Averigua si forman base los vectores .En caso afirmativo, **halla** las componentes de $[\overrightarrow{AG}]$, $[\overrightarrow{EG}]$ y $[\overrightarrow{BF}]$ respecto de la base $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.



4. Los componentes de $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u}=(1, 3, -2)$, $\vec{v}=(-1, 2, 5)$ y $\vec{w}=(0, 4, -3)$. **Halla** las componentes de:

   a. $\vec{x}=\vec{u}+2\vec{v}-3\vec{w}$

   b. $\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$

   c. $\vec{z}=2\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{5}\vec{w}$

5. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u}=(7, 6, 5)$ y $\vec{v}=(3, 2, 1)$. **Halla** las componentes de $\vec{x}$ y $\vec{y}$ sabiendo que:

$$\left.\begin{array}{l} 3\vec{x}+\vec{y}=\vec{u} \\ \vec{y}-\vec{x}=\vec{v} \end{array}\right\}$$

6. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en una cierta base son $\vec{u}=(1, 5, -2)$, $\vec{v}=(4, 0, -9)$, $\vec{w}=(0, -1, 6)$, $\vec{x}=(13, 3, -17)$ e $\vec{y}=(2, -10, -5)$. Expresa:

   a. $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

   b. $\vec{y}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y w

   c. $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y v

7. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una cierta base son $\vec{u}=(8, -5, 4)$, $\vec{v}=(-2, 3, -1)$ y $\vec{w}=(2, 11, 1)$.

   — ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente dependientes?

8. **Comprueba** que el vector $\vec{w}=(1, -1, 1)$ no puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=(2, 1, 2)$ y $\vec{v}=(-4, -2, 4)$.

   — ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente dependientes?

9. **Averigua** el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{u}=(k, -2, 0)$, $\vec{v}=(k, k, 1)$ y $\vec{w}=(3, 5, k)$ sean linealmente dependientes.

   — Para cada uno de los valores de k hallados, expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

10. **Averigua** el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{a}=(2, 1, k)$, $\vec{b}=(k, 3, 1)$ y $\vec{c}=(2, 3, 1)$ sean linealmente dependientes.

11. Razona por qué los vectores $\vec{x}=(2, k, 3)$, $\vec{y}=(3, -2, k)$ y $\vec{z}=(1, 1, -1)$ son linealmente independientes para cualquier valor de k.

12. Dados los vectores $\vec{u}=(1, a, b)$, $\vec{v}=(0, 2, c)$ y $\vec{w}=(0, 0, 3)$, ¿es posible hallar valores de a, b y c para los que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes? **Justifica** tu respuesta.

13. Se tiene el vector $\overrightarrow{AB}=(5, -4, 1)$. El extremo de uno de sus representantes se halla en el punto $(3, 2, -7)$. ¿En qué punto está situado su origen?

14. Dados los puntos $A = (1, 2,3)$, $B = (1, -1, 1)$ y $C = (0, 2, -5)$, **halla** las coordenadas del punto D para que $\overrightarrow{AB}$ sea equipolente a $\overrightarrow{CD}$.

15. **Halla** las coordenadas de los puntos M, N y P que dividen el segmento de extremos $A = (1, 2, 5)$ y $B = (3, 4, -1)$ en cuatro partes iguales.

16. **Halla** las coordenadas de los puntos A, B, C y D que dividen el segmento de extremos $M = (1, 2, 3)$ y $N = (6, -3, 8)$ en cinco partes iguales.

17. Sean A, B y M tres puntos distintos del espacio que cumplen que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AM}$. Conociendo las coordenadas de $A = (3, -5, 1)$ y $B = (-5, 7, 3)$, **calcula.**

18. Sean $A = (1, 3, 5)$, $B = (2, 1, 4)$ y $C = (-3, 0, 1)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. **Calcula** las coordenadas del cuarto vértice, D, y las del centro del paralelogramo, M.

19. **Halla** las coordenadas de un punto P del segmento de extremos $A = (1, 5, 0)$ y $B = (1, -4, 9)$, tal que:

$$[\overrightarrow{AP}] = \frac{4}{9}\,[\overrightarrow{AB}]$$

20. **Halla** las coordenadas del baricentro del tetraedro que tiene por vértices $A = (4, 6, 2)$, $B = (2, 7, 3)$, $C = (3, 0, 2)$ y $D = (-1, -1, 1)$.

TIC

21. **Accede** a la página www.ciencialab.com/mod/resource/view.php?id=228 y utiliza el recurso que ofrece para calcular el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (5, 1, 3)$ y $\vec{w} = (2, 2, 1)$.

22. **Utiliza** la calculadora Geogebra para resolver las operaciones con vectores siguientes, siendo $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (1, 3)$ y $\vec{w} = (6, 2)$.

    $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times 2\vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ y $(\vec{u} - \vec{v})\,(3\vec{v} + \vec{w})$

    –**Determina** de forma gráfica los ángulos que forman los vectores, u, v y w

23. Las cumbres A, B y C de tres montañas están alineadas de manera que la distancia entre B y C es el doble de la distancia entre A y B.

    Conociendo las coordenadas de $A = (1, 0, -2)$ y $B = (3, 2, 1)$, en un sistema de referencia dado, ¿cuáles pueden ser las coordenadas de C en el mismo sistema de referencia?

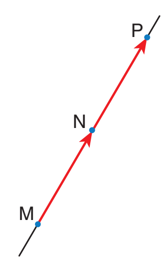
24. **Deduce** razonadamente algún método para determinar si tres puntos del espacio dados por sus coordenadas, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$, están alineados o no.

    - **Aplica** el método que hayas explicado para decidir si los puntos $A = (-2, -3, 1)$, $B = (-3, -4, 0)$ y $C = (4, 6, -2)$ están alineados.

25. **Considera** la pirámide ABCDE. Si $A = (2, 3, 4)$, $B = (-2, 1, 5)$, $C = (4, 1, -2)$ y $E = (6, 8, 0)$, halla las coordenadas del centro de la base, O, sabiendo que ésta es un paralelogramo.

    - Dados tres puntos M, N y P, se dice que M y P son simétricos respecto de N si y sólo si:

    $$[\overrightarrow{MN}] = [\overrightarrow{NP}]$$

    Teniendo en cuenta esto, y considerando de nuevo la pirámide ABCDE, determina:

    a. El simétrico de A respecto de B.

    b. El simétrico de E respecto del centro de la base.

26. **Encuentra** $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u} + 3\vec{v}$, $|\vec{u}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$ para:

    a. $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

    b. $\vec{u} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$

27. **Encuentra** el vector unitario con la misma dirección y sentido del vector dado:

    a. $-3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$

    b. $8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$

    c. $(4, 2, -4)$

28. **Encuentra** un vector paralelo a $(-4, 2, 4)$ con módulo 6.

29. Sea C el punto en el segmento AB que esta el doble de lejos de B que de A. Si $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, muestra que $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

30. Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector no nulo.

a. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son ángulos que forma $\vec{u}$ con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivamente, demuestra que:

$$\cos\alpha_1 = \frac{u_1}{|\vec{u}|}, \cos\alpha_2 = \frac{u_2}{|\vec{u}|}, \cos\alpha_3 = \frac{u_3}{|\vec{u}|}$$

(los números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se llaman ángulos directores)

b. **Halla** los ángulos directores del vector $\vec{u} = (-1, 8, 4)$.

31. **Encuentra** los ángulos directores del vector.

a. $\vec{u} = (3, 4, 5)$

b. $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$

c. $\vec{u} = (n, n, n)$ siendo $n > 0$

d. $\vec{u} = (2, -1, 1)$

32. **Determina** las coordenadas de los puntos P y Q que dividen el segmento de extremos $A = (-3, 6, 10)$ y $B = (6, 0, -2)$ en tres partes iguales.

33. **Determina** las coordenadas de los puntos P y Q que dividen el segmento de extremos $A = (7, -2, 3)$ y $B = (2, 4, 1)$ en tres partes iguales.

34. **Halla** las coordenadas de los puntos M, N, P y Q que dividen el segmento de extremos $A = (-1, 4, 1)$ y $B = (2, 9, 3)$ en cinco partes iguales.

35. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2, 3, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2, 4)$. **Halla** las componentes de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sabiendo que:

$3\vec{y} - \vec{x} = \vec{u}$

$\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{v}$

TIC

36. **Utiliza** el programa Derive para determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o no.

a. $\{(-6, -8, 3), (4, 3, 4), (-5, -3, -8)\}$

b. $\{(3, -1, 9), (9, -8, -1)\}$

c. $\{(k, 0, 2), (4, k, -2), (-2k, -2, k)\}$

37. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (7, -3, 5)$ y $\vec{v} = (-14, -5, 13)$. **Halla** las componentes de x y y sabiendo que:

a. $2\vec{x} + \vec{y} = \vec{u}$

b. $\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{v}$

38. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 2\sqrt{3}$ y $\vec{v} = \sqrt{3}$. Sabiendo qué $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 60°, **halla**:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

c. $|\vec{u} - \vec{v}|$ y $|2\vec{u} - \vec{v}|$

d. El ángulo que forman $\vec{u} - \vec{v}$ y $2\vec{u} - \vec{v}$

39. **Determina** el volumen del tetraedro de vértices $A = (2, y, 1)$, $B = (y - 3, y + x, 6)$, $C = (5, y - x, 5)$ y $D = (3, 5, 0)$, sabiendo que el triángulo ABC es equilátero y que $x > 0$.

40. ¿Qué ángulo forman dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$

41. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{5}$. Sabiendo que u y v forman un ángulo de 60°, **halla**:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

c. $|\vec{u} - \vec{v}|$ y $|2\vec{u} - \vec{v}|$

d. El ángulo que forman $\vec{u} - \vec{v}$ y $2\vec{u} - \vec{v}$

TIC

42. **Utiliza** el programa Derive para calcular y dibujar los siguientes grupos de vectores, siendo: $\vec{u} = (1, 3, 2)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (3, 2, 1)$

a. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$

b. $\vec{u}, \vec{w}, \vec{u} - \vec{w}$

43. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman, dos a dos, ángulos de 60° y, además, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$ y $|\vec{w}| = 3$. Si $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{y} = 2\vec{u} + \vec{w}$, **halla**:

a. $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ y $\vec{x} \cdot \vec{y}$

b. El ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

44. **Calcula** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{20}$.

- ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

45. Sabiendo que $\vec{u} + \vec{v} = 8$ y $\vec{u} - \vec{v} = 6$, **calcula** $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

46. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u} = (1, 2, -4)$, $\vec{v} = (3, -1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 3, -2)$. **Calcula**:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b. $\vec{u} \cdot (2\vec{w})$

c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

d. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{v} + \vec{w})$

47. Sean $\vec{u} = (-2, 2, 1)$, $\vec{v} = (3, x, x)$ y $\vec{w} = (y, 3, -3)$.

a. **Calcula** x e y sabiendo que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y que es perpendicular a $\vec{w}$.

b. **Halla** $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

48. Las componentes $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u} = (1, 2, -4)$, $\vec{v} = (3, -1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 3, -2)$. **Calcula**:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

b. $\vec{u} \cdot (2\vec{w})$ d. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{v} + \vec{w})$

49. Sean $\vec{u} = (-2, 2, 1)$, $\vec{v} = (3, x, x)$ y $\vec{w} = (y, 3, -3)$.

a. **Calcula** x e y sabiendo que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{w}$.

b. **Halla** $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

50. **Determina** todos los vectores de módulo 4 paralelos a $\vec{u} = (2, -2, -1)$.

51. **Halla** todos los vectores de módulo 4 que formen ángulo de 30° con $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y ángulo de 135° con $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

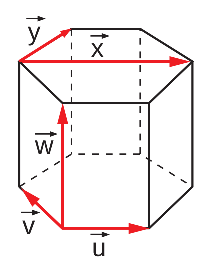
52. **Halla** dos números positivos, x e y, tales que los vectores $\vec{u} = (2, x, -2x)$ y $\vec{v} = (15, 2y, y)$ formen un ángulo de 60° y $|u| = \vec{3}$.

53. **Considera** los puntos del espacio $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 2)$ y $B = (1, -1, 3)$. Expresa $\overrightarrow{OA}$ como suma de dos vectores: uno, de la misma dirección que $\overrightarrow{OB}$, y otro, perpendicular a $\overrightarrow{OB}$.

54. **Determina** el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F} = (-5, 35, 15)$ que actúa sobre un cuerpo que se desplaza desde el punto $A = (1, 1, 1)$ hasta el punto $B = (-2, 0, 3)$ (en unidades SI).

55. **Halla** qué ángulos forma el vector $\vec{u} = (1, -3, 2)$ con cada uno de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

56. Sabiendo que las aristas de este prisma hexagonal regular son todas unitarias, **halla**:



a. $\vec{u} \times \vec{v}$

b. $\vec{y} \times \vec{x}$

57. Sean $\vec{u} = (3, 0, -2)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 3)$.

Calcula:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b. $\vec{u} \cdot (3\vec{w})$ c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - \vec{w})$

58. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 4, -8)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 1, -1)$, **halla**:

a. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

b. $|\vec{u}|$, $|\vec{v} \times \vec{w}|$ y $|(\vec{u} \times \vec{w}) \times \vec{v}|$

59. **Determina** todos los vectores perpendiculares a $\vec{u} = (4, -1, 1)$ y a $\vec{v} = (-8, 0, -1)$, de módulo 3.

60. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 3, -1)$, **calcula** el área del paralelogramo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

61. **Halla** el momento de la fuerza $\vec{F} = (1, 2, 3)$ aplicada en el punto $A = (1, -1, 3)$ respecto al punto $O = (2, 1, -4)$ (en unidades SI).

62. **Halla** el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

63. **Halla** el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de una de sus caras.

64. **Demuestra** que si $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo.

65. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 5, -4)$ y $\vec{w} = (1, 1, 3)$. **Halla** $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ y $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. ¿Cumple el producto vectorial la propiedad asociativa?

66. **Halla** los valores de k para que el volumen del paralelepípedo formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sea el valor V dado.

a. $\vec{u}=(2, 0, 1)$, $\vec{v}=(2k, 1, 0)$, $\vec{w}=(4, k, 1)$, $V = 16$

b. $\vec{u}=(1, k, k)$, $\vec{v}=(0, 3, k)$, $\vec{w}=(1, 1, 1)$, $V = 15$

67. **Demuestra** que:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{y}) = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{w} & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot \vec{y} & \vec{v} \cdot \vec{y} \end{vmatrix}$$

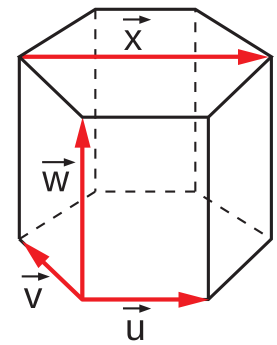
68. **Determina** la fuerza que actúa sobre una carga de 5 C situada en un campo magnético de intensidad $\vec{B} = (1, 1, -2)$, sabiendo que su velocidad es $\vec{v} = (2, -1, 3)$ (en unidades SI).

69. Sabiendo que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{w}| = 1$, y que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3$ y $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1$, **determina** el valor de k para que los vectores $\vec{x} = 2u + kv - kw$ e $\vec{y} = \vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w}$ sean paralelos.

70. Sabiendo que las aristas de este prisma hexagonal regular son todas unitarias, **halla.**

a. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

b. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{x})$



71. Sean $\vec{u} = (2, 0, -5)$, $\vec{v} = (1, 3, -1)$ y $\vec{w} = (4, 1, -3)$. **Halla.**

a. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

b. $2\vec{u} \cdot (\vec{v} \times 2\vec{w})$

c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot ((\vec{v} - \vec{w}) \cdot 3\vec{w})$

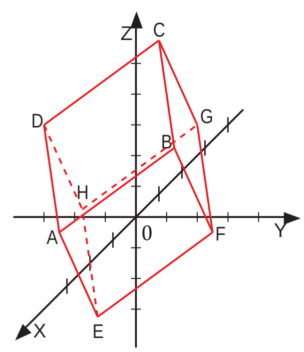
72. **Halla** el volumen del paralelepípedode la figura sabiendo que:

$A = (2, -1, 1)$

$B = (1, 2, 3)$

$C = (-1, 0, 5)$

$F = (2, 4, 2)$



73. **Calcula** el volumen del tetraedro de vértices $A = (x, 1, 1)$, $B = (1, -1, 2)$, $C = (x, -1, 3)$ y $D = (y + 1, -3, 2 - 2y)$, sabiendo que las aristas AB y BD son perpendiculares y que las aristas AB y AC forman un ángulo de 45°.

74. **Halla** el volumen del paralelepípedo de aristas adyacentes PQ, PR, y PS, si:

a. $\vec{u} = (6, 3, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$, $\vec{w}\ (4, -2, 5)$

b. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

75. **Halla** el volumen del paralelepípedo de aristas adyacentes PQ, PR, y PS, si:

a. $P = (2,0,-1)$, $Q = (2,-2,2)$, $R = (4,1,0)$, $S = (3,-1, 1)$

b. $P = (3,0,1)$, $Q = (0,4,2)$, $R = (-1,2,5)$, $S = (5,1,-1)$

Para finalizar

1 **Encuentra** los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A = (0; 1; 1)$; $B = (-2; 4; 3)$; $C = (1; 2; -1)$.

2 Una molécula de metano, CH_4, está estructurada de manera que los cuatro átomos de hidrogeno forman un tetraedro regular, con el átomo de carbono en su centroide. El ángulo de enlace es el ángulo formado por la conexión H-C-H, es decir, el ángulo entre las líneas que conectan al átomo de carbono con dos de los átomos de hidrogeno. **Calcula** este ángulo.

3 **Encuentra** dos vectores perpendiculares a $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y a $\vec{v} = (0, 4, 4)$.

4 Las componentes de en una base ortonormal de V_3 son $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 4, -7)$ y $\vec{w} = (2, 1, -4)$. **Calcula**:

a. $\vec{u} \times \vec{v}$

b. $\vec{u} \times \vec{w}$

c. $\vec{v} \times \vec{w}$

d. $(\vec{u} \times 2\vec{v}) \times \vec{w}$

5 Las componentes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 5, -4)$, $\vec{w} = (1, 1, 3)$. **Halla**

a. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

b. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

6 Sea P el centro de la cara superior del paralelepípedo de la figura 25 y O su centro. **Halla** su volumen sabiendo que:

$A = (1, 1, 1)$, $B = (4, -1, 2)$, $P = (2, 1, 0)$, $O = (3, 1, -2)$

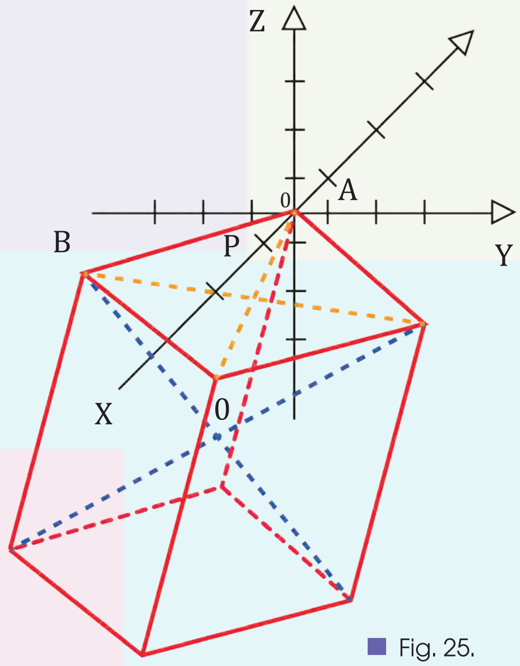


Fig. 25.

7 Sean $F_1 = (2, 5, -1)$ y $F_2 = (1, -3, 2)$ dos fuerzas aplicadas en el punto $A = (1, 2, 3)$. **Halla** el momento de cada una de las dos fuerzas respecto al punto $O = (-1, 3, -4)$ (en unidades SI).

AUTOEVALUACIÓN

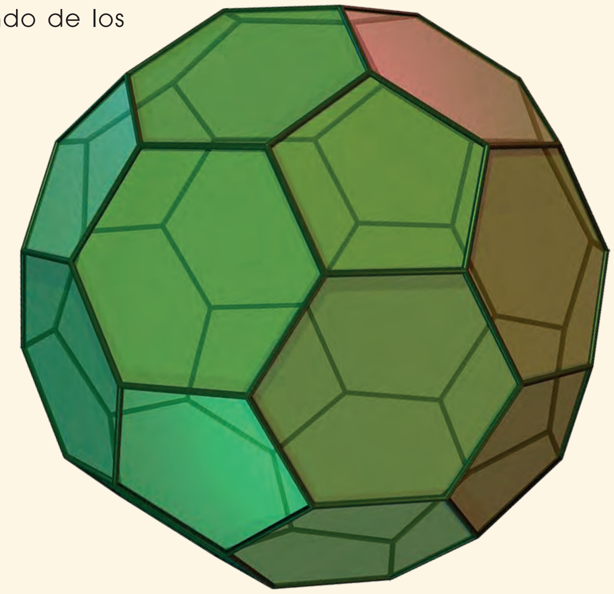
Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

Las matemáticas escondidas tras el balón

Mientras se gritaba por «la Tri» en la Copa América, los hinchas pasaban discusiones interminables calculando los puntos necesarios, los partidos a ganar o empatar y las posibilidades de entrar como mejor tercero dependiendo de los resultados de los demás partidos. Todo esto son aplicaciones de la matemática que se hacen sin siquiera darse cuenta. Pero esta intromisión de la ciencia en el deporte va más allá. En un gol influyen los vectores, dándole la dirección al balón, la fuerza a la patada, el efecto por sus ángulos y su desviación por la velocidad y dirección del viento.

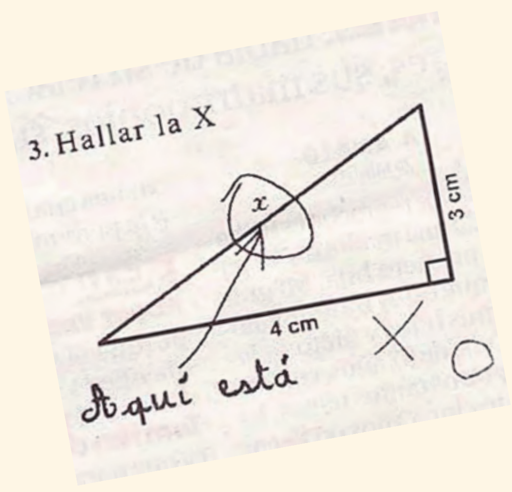


https://goo.gl/jY9jQb

SENTIDO CRÍTICO

Por qué el álgebra busca la x

El uso de las letras x, y, z para representar incógnitas y las primeras del abecedario para valores conocidos, se remonta al libro *La geometrie* de Descartes. Se cuenta que cuando el libro se estaba imprimiendo y debido a la gran cantidad de ecuaciones que tenía, los impresores, que utilizaban letras de madera dispuestas sobre una plancha para crear el modelo de cada página, se quedaban sin letras. El editor entonces le preguntó a Descartes si podía emplear letras distintas a las originales para las ecuaciones. Descartes le respondió que le eran indiferentes las letras que utilizara. El editor eligió entonces la x porque en francés esta letra se utiliza poco.



SI YO FUERA....

Diseñador de videojuegos

¿Quién no ha soñado con pasar sus días de trabajo frente a una pantalla diseñando juegos para una de las grandes consolas? ¿A quién no se le ha ocurrido mil y una ideas para juegos excelentes, llenos de humor, aventura y explosiones magníficas al ver una película o leer un libro de ciencia ficción? Pues detrás de todo juego de video se encuentra un concepto matemático base: los vectores. Desde los movimientos de los personajes, el realismo en la física dentro de los juegos, las texturas, los cambios de iluminación, los sonidos realistas hasta la manera en que el juego sabe cómo interpretar la ubicación en el mapa del usuario, todo el diseño de videojuegos se basa en *software* que utiliza vectores.



5 Geometría en el espacio

CONTENIDOS:



http://goo.gl/t7UrC8

Noticia:

elpaís.com tiene una sección de juegos con la ciencia, en la que se publicó el siguiente artículo: *La importancia del juego en Matemática*. Lo puedes leer en: http://elpais.com/elpais/2015/08/19/ciencia/1439982619_073329.html.

Web:

El sobre mágico de Lewis Carroll. **Realiza** este juego con planos en: http://elpais.com/elpais/2015/07/02/ciencia/1435850002_183433.html.

EN CONTEXTO:

El uso de planos y líneas oblicuas sigue siendo predominante en el diseño arquitectónico contemporáneo. En esta unidad, estudiaremos cómo definir estos objetos en el espacio, y también, cómo comparar sus posiciones relativas.

1. RECTAS EN EL ESPACIO

Y TAMBIÉN: ¿?

La dirección de una recta puede venir dada por un vector director o por dos puntos. Luego, una recta queda determinada por un punto y un vector director o bien, por dos puntos.

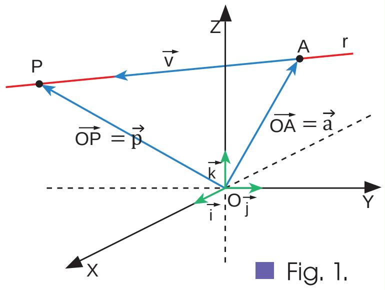


Fig. 1.

Si A = (-1, 1, 3)
y v = (3, -2, 1)

Como sucedía en el plano, para determinar una recta en el espacio son precisos un punto y una dirección. Cualquier vector que tenga la misma dirección que la recta es un vector director de esta.

Consideremos la recta r que pasa por el punto A y tiene el vector director $\vec{v}$. La simbolizaremos por $r(A; \vec{v})$.

Veamos, a continuación, diferentes formas de expresarla.

1.1. Ecuación vectorial

Al observar la figura, vemos que, dado cualquier punto P de la recta r, los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección. Así, $\overrightarrow{AP} = k\vec{v}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, tenemos $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$.

Sean $\vec{p}$ y $\vec{a}$ los vectores de posición de P y A, respectivamente. Puesto que $\overrightarrow{AP} = k\vec{v}$, a la igualdad anterior la escribimos como:

$$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v}$$

A esta expresión, la conocemos como ecuación vectorial de la recta.

Ecuación vectorial de $r\ (A;\vec{v})$:
$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v}$
$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + k\,(3, -2, 1)$

Sean (x, y, z), (a_1, a_2, a_3) y (v_1, v_2, v_3) las componentes de $\vec{p}$, $\vec{a}$ y $\vec{v}$, respectivamente. Entonces, podemos expresar la ecuación anterior como:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k\,(v_1, v_2, v_3)\ k \in \mathbb{R}$$

1.2. Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones paramétricas de $r(A; \vec{v})$:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 3k \\ y = 1 - 2k \\ z = 3 + k \end{array}\right\}$$

Desarrollamos la ecuación vectorial de la recta r expresada en componentes:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (a_1, a_2, a_3) + (kv_1, kv_2, kv_3)\\ &= (a_1 + kv_1, a_2 + kv_2, a_3 + kv_3)\end{aligned}$$

Al separar por componentes la ecuación vectorial, obtenemos:

$$x = a_1 + kv_1$$

$$y = a_2 + kv_2$$

$$z = a_3 + kv_3$$

A estas ecuaciones las denominamos ecuaciones paramétricas de la recta.

1.3. Ecuaciones continuas

Si en las ecuaciones paramétricas los valores v_1,v_2 y v_3 son diferentes de cero, podemos despejar el parámetro k en las tres:

$$k = \frac{x - a_1}{v_1};\ k = \frac{y - a_2}{v_2};\ k = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Al igualar las expresiones, tenemos:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

A estas ecuaciones, las denominamos ecuaciones continuas de la recta.

1.4. Ecuaciones implícitas

A partir de las ecuaciones continuas de la recta, obtenemos:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \Rightarrow v_2(x - a_1) = v_1(y - a_2)$$

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{z - a_3}{v_3} \Rightarrow v_3(x - a_1) = v_1(z - a_3)$$

$$v_2x - v_1y + (a_2v_1 - a_1v_2) = 0$$

$$v_3x - v_1y + (a_3v_1 - a_1v_3) = 0$$

A estas ecuaciones las solemos expresar de manera general como:

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

A estas ecuaciones las denominamos ecuaciones implícitas de la recta.

Ejemplo 1

Dada la recta $r\ (A; \vec{v})$, con $A = (2, -1, 4)$ y $\vec{v} = (1, 0, -2)$ determinemos:

a. Su ecuación vectorial.

b. Dos puntos de r distintos de A y un vector director distinto de $\vec{v}$.

Resolución:

a. La ecuación vectorial es $\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v} : (x, y, z) = (2, -1, 4) + k\,(1, 0, -2)$

b. Damos a k dos valores distintos de cero para obtener otros dos puntos, B y C, de r :

$$k = 1 \Rightarrow B = (2, -1, 4) + 1\,(1, 0, -2) = (3, -1, 2)$$
$$k = 2 \Rightarrow C = (2, -1, 4) + 2\,(1, 0, -2) = (4, -1, 0)$$

Cualquier vector de la forma $k\vec{v}$ es un vector director de r. Así, cogeremos, por ejemplo, $u = 2 \cdot (1, 0, -2) = (2, 0, -4)$.

Ecuaciones continuas de $r\ (A; \vec{v})$:

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{1}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

- Si en la ecuación general de la recta despejamos y, tenemos:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Observa que $\frac{-A}{B}$ es la pendiente de la recta, y que $\frac{-C}{B}$ es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje OY (ordenada en el origen).

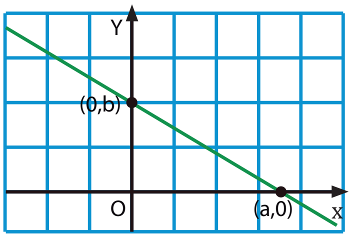
Si designamos la pendiente por m y la ordenada en el origen por b, a la expresión anterior la escribimos:

$$y = mx + b$$

A esta expresión la conocemos como ecuación explícita de la recta.

- Si la recta corta a los ejes en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, podemos escribir la recta como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



- A esta expresión la conocemos como ecuación canónica o segmentaria de la recta.

Ecuaciones implícitas de $r\ (A; \vec{v})$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x - 3z + 10 = 0 \end{array}\right\}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Si conocemos dos puntos de la recta, $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, un vector director de r será $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$:

$\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

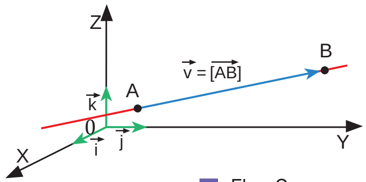


Fig. 2.

La ecuación vectorial será:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k\,(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

y de aquí podemos obtener el resto de las ecuaciones de la recta.

Por ejemplo, la recta que pasa por los puntos A = (1, 4, 2) y B = (5, 3, 0) tiene la siguiente ecuación vectorial:

$$r: (x, y, z) = \vec{a} + k\,[\overrightarrow{AB}]$$

$$(x, y, z) = (1, 4, 2) +$$

$$+ k\,(5 - 1, 3 - 4, 0 - 2)$$

$$(x, y, z) = (1, 4, 2) + k\,(4, -1, -2)$$

Ejemplo 2

Escribamos las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por A = (3, 1, -2) y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (-3, 2, 1)$.

- Determinemos si el punto B = (2, -1, 4) pertenece a r.

Resolución:

Las ecuaciones paramétricas de $r\,(A; \vec{v})$ son:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - 3k \\ y &= 1 + 2k \\ z &= -2 + k \end{aligned}\right\}$$

- Para saber si el punto B pertenece a r, debemos ver si sus coordenadas satisfacen las ecuaciones paramétricas para algún valor de k:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 3 - 3k \\ -1 &= 1 + 2k \\ 4 &= -2 + k \end{aligned}\right\} \begin{aligned} k &= \frac{1}{3} \\ k &= -1 \\ k &= 6 \end{aligned}$$

Puesto que obtenemos valores distintos de k, B no pertenece a r.

Ejemplo 3

Dados los puntos A = (3; 1; 0) y B = (5; 0; -1):

a. Escribamos las ecuaciones continuas de la recta que pasa por A y B.

b. Determinemos si el punto C = (7; -1; -2) pertenece a dicha recta.

Resolución:

a. Hallemos $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$ y tomemos este vector y el punto A para escribir las ecuaciones continuas:

$$\vec{v} = (5 - 3; 0 - 1; -1 - 0) = (2; -1; -1)$$

$$r\,(A; \vec{v}): \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 0}{-1}$$

b. El punto C = (7; -1; -2) pertenecerá a r si verifica sus ecuaciones:

$$\frac{7 - 3}{2} = \frac{-1 - 1}{-1} = \frac{-2 - 0}{-1} \Rightarrow \text{C pertenece a r.}$$

Ejemplo 4

Escribamos las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por el punto P = (1, −2, 6) y tiene como vector director a $\vec{v} = (2, 3, 1)$.

Resolución:

Escribimos las ecuaciones continuas de la recta:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 6}{1}$$

Y, a partir de ellas, hallamos las ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - 1}{2} &= \frac{y + 2}{3} \\ \frac{y + 2}{3} &= \frac{z - 6}{1} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow 3x - 3 = 2y + 4 \\ &\Rightarrow y + 2 = 3z - 18 \end{aligned}\left.\vphantom{\begin{aligned} a \\ b \end{aligned}}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow 3x - 2y - 7 = 0 \\ &\Rightarrow y - 3z + 20 = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Escribamos las ecuaciones paramétricas y determinemos un vector director de la recta r cuyas ecuaciones implícitas son:

$$r: \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 2x + 5y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Resolución:

Para transformar las ecuaciones implícitas en paramétricas, resolvamos el sistema por el método de Cramer.

- Escogemos un menor de orden dos cuyo determinante sea diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$$

- Sustituimos la incógnita que no interviene en dicho menor por un parámetro $z = k$, y trasladamos los términos que contienen k al segundo miembro de las ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 2x + 5y + 2z - 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 2y - k - 3 = 0 \\ 2x + 5y + 2k - 4 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} x + 2y = k + 3 \\ 2x + 5y = -2k + 4 \end{matrix}\right\}$$

- Finalmente, aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+3 & 2 \\ -2k+4 & 5 \end{vmatrix}}{1} = 5k + 15 + 4k - 8 = 7 + 9k$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k+3 \\ 2 & -2k+4 \end{vmatrix}}{1} = -2k + 4 - 2k - 6 = -2 - 4k$$

$$z = k$$

Luego, las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{matrix} x = 7 + 9k \\ y = -2 - 4k \\ z = k \end{matrix}\right\}$$

Un vector director será $\vec{v} = (9, -4, 1)$.

Actividades

1. **Explica** qué característica común tienen los diferentes vectores directores de una misma recta.
2. **Explica** Si $(x, y, z) = (2, -7, 1) + k\,(2, 3, -2)$ es la ecuación vectorial de la recta r, determina: a) dos puntos de r; b) otra ecuación vectorial.
3. **Representa** la recta con vector director $\vec{v} = (3, -1, 4)$ y que pasa por el punto $A = (-1, 2, 3)$.
4. **Determina** la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A y B, siendo $A = (3, 0, -5)$ y $B = (1, -4, 6)$.
5. **Escribe** las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A = (7, 2, -3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (1, 0, -2)$.
6. Dados los puntos $A = (2, 1, 4)$ y $B = (3, -1, 2)$, escribe las ecuaciones paramétricas y continuas de la recta que pasa por A y B, y averigua si el punto $C = (1, 3, 7)$ pertenece a dicha recta.

Y TAMBIÉN: ¿?



http://goo.gl/qTGex7

Gaspard Monge

Matemático francés (Beaune, 1746-París, 1818).

De origen humilde, estudió en el Colegio de la Orden de los Oratorianos e ingresó en la Escuela de Ingenieros Militares de Mezières en 1764.

Fundador de la geometría descriptiva, elaboró métodos para la representación de figuras espaciales.

Monge no solo fue un buen matemático, sino también un buen maestro, tanto por su capacidad para exponer con claridad y sencillez los conocimientos, como por el entusiasmo que despertaba en sus alumnos.

En 1794, participó de manera decisiva en la creación de *l'École Polytechnique* de París, una institución docente por la que pasó la mayoría de los matemáticos del siglo XIX.

A partir de las clases impartidas en *l'École Polytechnique* y en *l'École Normale* de París, Monge publicó varios libros, entre los que destacan *Feuilles d'analyse apliquée à la géometrie* (1795), *Géométrie descriptive* (1798)...

Estos textos y la labor educativa de Monge constituyeron un impulso fundamental para el posterior auge y desarrollo de la geometría a lo largo del siglo XIX.

1.5. Posiciones relativas de dos rectas

Las ecuaciones implícitas de las rectas son ecuaciones lineales. De ahí que podamos determinar la posición relativa de rectas en el espacio, a partir del estudio de la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes.

Veamos qué posiciones relativas pueden presentar dos rectas, $\vec{r}\,(A; \vec{v}\,)$ y $\vec{r}'\,(A'; \vec{v})$, dadas por sus ecuaciones implícitas:

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Para hallar las posiciones relativas, consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones y escribimos la matriz M y la matriz ampliada M', asociadas con dicho sistema:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{array}\right)$$

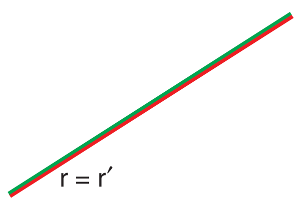
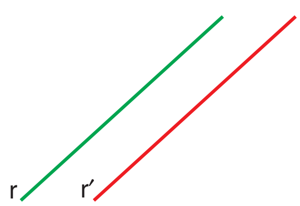
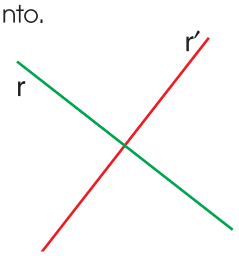
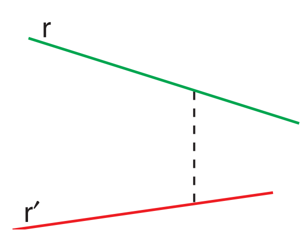
Si al reducir ambas matrices, obtenemos solo dos filas no nulas, es decir, un sistema compatible indeterminado, las rectas son coincidentes.	Si al reducir la matriz M obtenemos dos filas no nulas, y al reducir la matriz M' obtenemos tres filas no nulas, las rectas son paralelas.	Si al reducir ambas matrices obtenemos tres filas no nulas (es decir, tenemos un sistema compatible determinado), las rectas son secantes, en otras palabras, se cortan en un punto.	Si al reducir M' tenemos cuatro filas no nulas (un sistema incompatible), podemos deducir que no hay puntos comunes. Las rectas son alabeadas (se cruzan).
			

Tabla 1.

En caso de que las dos rectas vengan dadas por sus ecuaciones vectoriales, paramétricas o continuas, podemos determinar su posición relativa a partir de sus vectores directores.

Coincidentes	Paralelas	Se cortan	Se cruzan
Si los vectores directores respectivos $\vec{v}$ y v' tienen la misma dirección, las rectas son coincidentes o paralelas. $\vec{v} = k\vec{v}'$ Para distinguir cada caso, bastará tomar un punto cualquiera de una de las rectas y sustituir sus coordenadas en la ecuación de la otra.		Si los vectores directores respectivos, $\vec{v}$ y $\vec{v}'$, no tienen la misma dirección, las rectas se cortan o se cruzan. $\vec{v} \neq k\vec{v}'$ Para distinguir cada caso, igualamos las ecuaciones vectoriales de ambas rectas.	
Si cumple dicha ecuación, son rectas coincidentes.	Si no la cumple, se trata de rectas paralelas.	Si existe solución, las rectas se cortan.	Si no existe solución, las rectas son alabeadas.

Tabla 2.

1.6. Posición de rectas respecto de la referencia

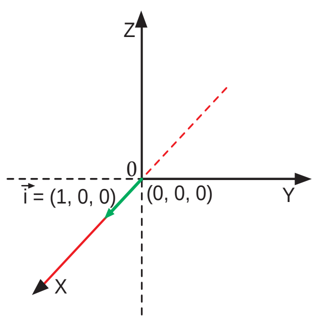
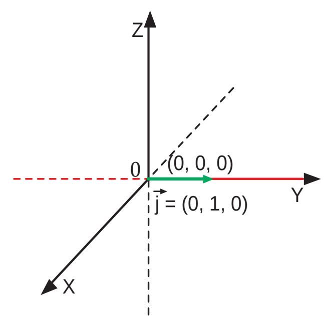
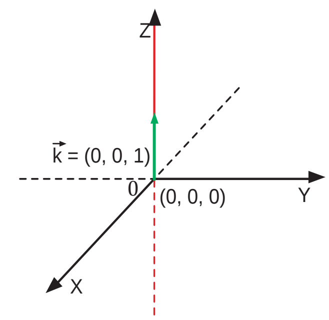
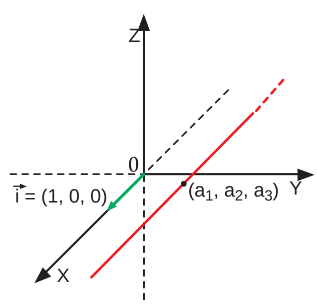
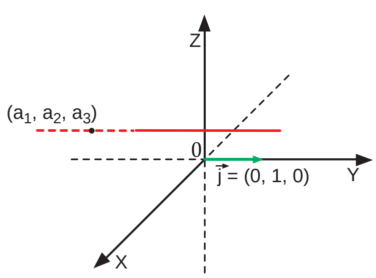
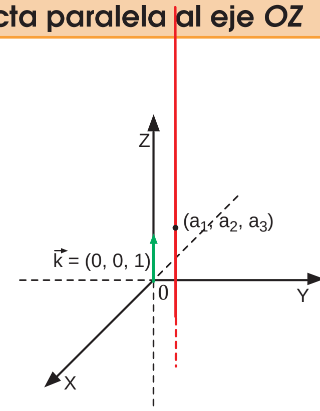
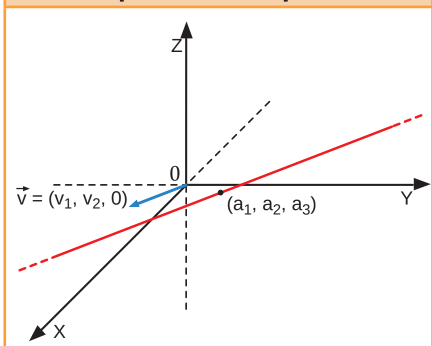
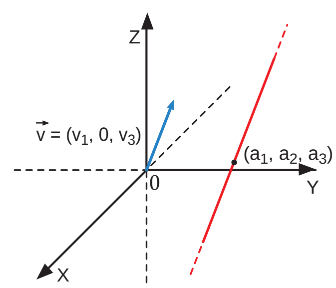
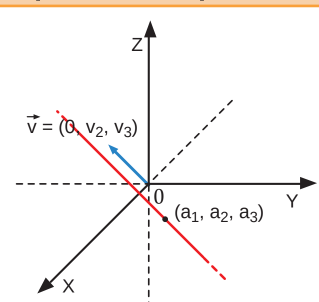
Eje *OX*	Eje *OY*	Eje *OZ*
 r: $(x, y ,z) = (0, 0, 0) + k(1, 0, 0)$ r: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	 r: $(x, y ,z) = (0, 0, 0) + k(0, 1, 0)$ r : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	 r: $(x, y ,z) = (0, 0, 0) + k(0, 0, 1)$ r : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
Recta paralela al eje *OX*	**Recta paralela al eje *OY***	**Recta paralela al eje *OZ***
 r: $(x, y ,z) = (a_1, a_2, a_3) + k(1, 0, 0)$ r: $\begin{cases} y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases}$	 r: $(x, y ,z) = (0, 0, 0) + k(0, 1, 0)$ r: $\begin{cases} x = a_1 \\ z = a_3 \end{cases}$	 r: $(x, y ,z) = (0, 0, 0) + k(0, 0, 1)$ r: $\begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \end{cases}$
Recta paralela al plano *XY*	**Recta paralela al plano *XZ***	**Recta paralela al plano *YZ***
 r : $(x, y ,z) = (0, 0, 0) + k(1, 0, 0)$ r: $\begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ z = a_3 \end{cases}$	 r : $(x, y ,z) = (0, 0, 0) + k(1, 0, 0)$ r: $\begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ y = a_2 \end{cases}$	 r : $(x, y ,z) = (0, 0, 0) + k(1, 0, 0)$ r: $\begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ x = a_1 \end{cases}$

Tabla 3.

2. PLANOS EN EL ESPACIO

Para determinar un plano en el espacio, son precisos un punto y dos direcciones diferentes. Estas direcciones vienen dadas por dos vectores no paralelos a los que denominamos vectores directores del plano.

Consideremos el plano L que pasa por el punto A y tiene los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Lo simbolizaremos por $L(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Veamos, a continuación, diferentes formas de expresarlo.

2.1. Ecuación vectorial

Observa en la figura el plano $L(A; \vec{u}, \vec{v})$.

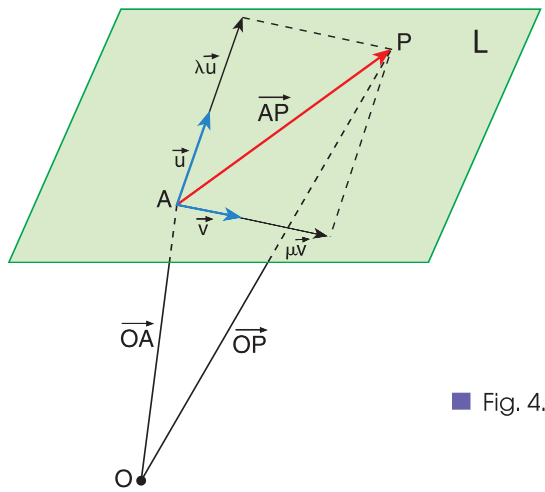


Fig. 4.

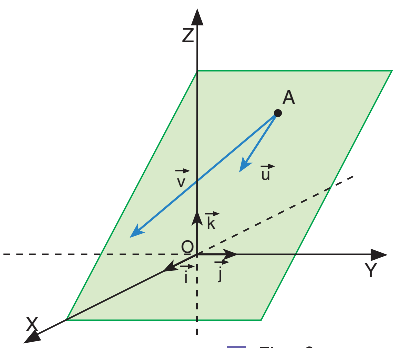


Fig. 3.

Si $A = (-1, 1, 3)$,

$\vec{u} = (1, 0, -1)$ y

$\vec{v} = (3, -2, 1)$

Ecuación vectorial de $\pi (A; \vec{u}, \vec{v})$:

$$p = a + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$(x, y, z) = (-1, 1, 3) +$$

$$\lambda(1, 0, -1) + \mu (3, -2, 1)$$

Dado un punto genérico P del plano, el vector $\overrightarrow{AP}$ resulta de la suma de múltiplos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por tanto, $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ con λ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Además, se cumple:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Sean $\vec{p}$ y $\vec{a}$ los vectores posición de P y A, respectivamente. Puesto que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, a la igualdad anterior la podemos escribir como:

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

A esta expresión la conocemos como ecuación vectorial del plano.

Sean (x, y, z), (a_1, a_2, a_3), (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) las componentes de $\vec{p}$, $\vec{a}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Entonces, podemos expresar la ecuación anterior como:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3)$$

2.2. Ecuaciones paramétricas

Desarrollemos la ecuación vectorial del plano L expresada en componentes:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3) =$$

$$= (a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1, a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2, a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3)$$

Al separar las tres componentes de la ecuación vectorial, obtenemos:

$$x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$$

$$y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$$

$$z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

A estas ecuaciones las denominamos ecuaciones paramétricas del plano.

2.3. Ecuación general

Para cada punto del plano, a las tres ecuaciones paramétricas podemos considerarlas como un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, λ y μ, que debe tener solución única. Por ello, el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - a_1 = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y - a_2 = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z - a_3 = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\}$$

debe ser compatible determinado. Al desarrollar y resolver el sistema de ecuaciones con esto en mente, obtenemos:

$$(u_2 v_3 - u_3 v_2)x + (u_3 v_1 - u_1 v_3)y + (u_1 v_2 - u_2 v_1)z + [- a_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2)$$
$$- a_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) - a_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)]$$

Si llamamos A, B y C a los coeficientes respectivos de x, y, z y D al término independiente, obtenemos la ecuación lineal:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

que conocemos como ecuación general, cartesiana o implícita del plano.

Ecuación general de $\pi (A; \vec{u}, \vec{v})$:

$$-2x - 4y - 2z + 8 = 0$$

$$x + 2y + z - 4 = 0$$

Ejemplo 6

Sea el plano $\pi (A; \vec{u}, \vec{v})$ con $A = (3, 0, -1)$ $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 0)$. Determinemos:

a. Su ecuación vectorial

b. Dos puntos de π distintos de A

c. Dos vectores directores distintos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d. Otra expresión de la ecuación vectorial

Resolución:

a. $(x, y, z) = (3, 0, -1) + \lambda (1, 2, -3) + \mu (-2, 3, 0)$

b. Damos diferentes valores a λ y μ para obtener otros puntos:

Si $\lambda = 1$ y $\mu = 0$: $B = (3, 0, -1) + 1(1, 2, -3) + 0 (-2, 3, 0) = (4, 2, -4)$

Si $\lambda = 1$ y $\mu = 1$: $C = (3, 0, -1) + 1(1, 2, -3) + 1(-2, 3, 0) = (2, 5, -4)$

c. Obtenemos dos vectores directores del plano a partir de A, B y C:

$\overrightarrow{BC} = (2 - 4, 5 - 2, 4 - (- 4)) = (-2, 3, 0) = \vec{u}'$

$\overrightarrow{AC} = (2 - 3, 5 - 0, -4 - (-1)) = (-1, 5, -3) = \vec{v}'$

d. Como los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ son linealmente independientes, podemos utilizarlos para escribir otra ecuación vectorial. Así, para $B = (4, 2, -4)$:

$(x, y, z) = (4, 2, -4) + \lambda (-2, 3, 0) + \mu (-1, 5, -3)$

2.4. Posición relativa de dos planos

Veamos las posiciones relativas que pueden presentar dos planos $L\ (P;\ \vec{u},\vec{v})$ y $L'(Q;\ \vec{u}',\vec{v}')$, cada uno de ellos dado por su ecuación general:

$$L: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Para hallar las posiciones relativas, consideramos el sistema formado por las dos ecuaciones:

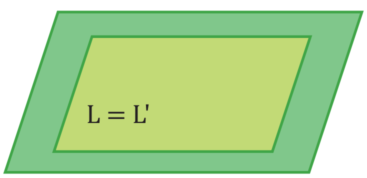
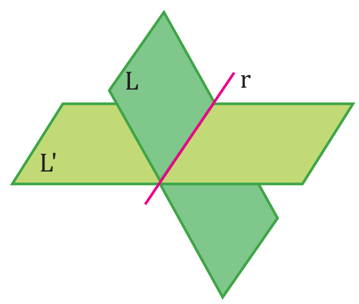
Sistema consistente indeterminado: Sus soluciones dependen de dos parámetros.	**Sistema inconsistente**: No hay puntos comunes.	**Sistema consistente indeterminado**: Sus soluciones dependen de un parámetro.
Equivale a: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ Los planos son coincidentes.  Así, por ejemplo, los planos L y L': $L: 0,6x - 0,2y - 0,4z + 2,4 = 0$ $L': 3x - y - 2z + 12 = 0$ son planos coincidentes, puesto que: $\frac{0,6}{3} = \frac{-0,2}{-1} = \frac{-0,4}{-2} = \frac{2,4}{12}$	Equivale a: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ Los planos son paralelos.  Así, por ejemplo, los planos L y L' $L: 2x + 3y - z + 1 = 0$ $L': 4x + 6y - 2z + 7 = 0$ son planos paralelos, puesto que: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{7}$	Equivale a: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$; o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ Los planos son secantes, es decir, se cortan en una recta.  Así, por ejemplo, los planos L y L' $L: 2x - y + 3z + 1 = 0$ $L': x + y + 5z + 4 = 0$ son planos secantes, puesto que: $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{5}$

Tabla 4.

Actividades

7. **Estudia** la posición relativa de los siguientes pares de planos:

a. $\pi: 3x - y + 2z = 0$
$\pi': 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

b. $\pi: 2x - y + 3z + 4 = 0$
$\pi': x + 3y - 2z + 1 = 0$

c. $\pi: 5x - 2y + 3z = 0$
$\pi': 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

d. $\pi: z + 1 = 0$
$\pi': z = 1$

2.5. Posición relativa de tres planos

Para estudiar la posición relativa de tres planos, $L_1\ (A;\vec{u},\vec{v}),L_2\ (A';\vec{u}',\vec{v}')$ y $L_3(A''; \vec{u}'',\vec{v}'')$, dados por sus ecuaciones generales:

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$L_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$L_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Consideramos el sistema formado por las tres ecuaciones y escribimos la matriz M y la matriz ampliada M', asociadas con dicho sistema:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right)$$

TIC

Visita:

www.josechu.com/planes_in_3d/index_es.htm#1

Al reducir las matrices:

<table>
<tr>
<td rowspan="2">M tiene una fila no nula.
M' tiene una fila no nula.

Sistema consistente indeterminado: Sus soluciones dependen de dos parámetros.

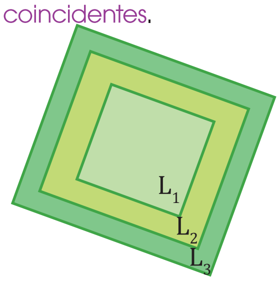
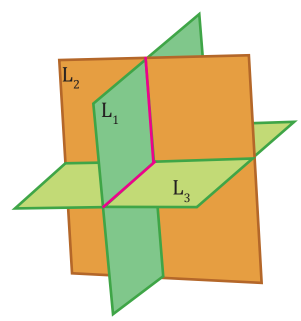
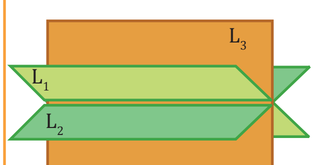
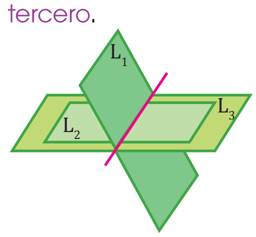
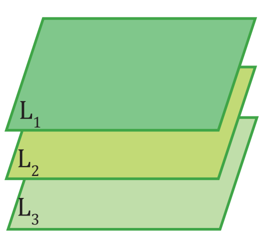
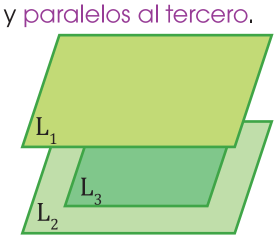
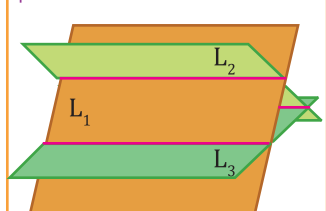
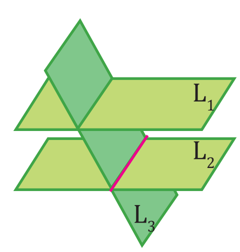
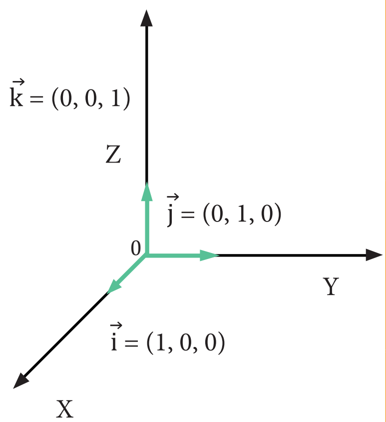
Entonces, los planos son coincidentes.

</td>
<td colspan="2">M tiene dos filas no nulas.
M' tiene dos filas no nulas.
Sistema consistente indeterminado: Sus soluciones dependen de un parámetro; luego, estos planos tienen una recta en común. A continuación, debemos determinar si existen dos planos coincidentes</td>
<td rowspan="2">M tiene tres filas no nulas.
M' tiene tres filas no nulas.
Sistema consistente determinado: Los planos son secantes en un punto.

</td>
</tr>
<tr>
<td>No existen planos coincidentes. Los tres planos son secantes en una recta.

</td>
<td>Existen planos coincidentes. Dos de los planos son coincidentes y secantes al tercero.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">M tiene una fila no nula.
M' tiene tres filas no nulas.
Sistema inconsistente: Al tener M una fila, existen planos paralelos. A continuación, debemos determinar si existen planos coincidentes.</td>
<td colspan="2">M tiene dos filas no nulas.
M' tiene tres filas no nulas.
Sistema inconsistente: Al tener M dos filas, existen planos secantes. A continuación, debemos determinar si existen planos paralelos.</td>
</tr>
<tr>
<td>No existen planos coincidentes. Planos paralelos y distintos entre todos.

</td>
<td>En este caso, existen planos coincidentes.
Dos planos coincidentes y paralelos al tercero.

</td>
<td>No existen planos paralelos. Los planos son secantes, o se cortan, entre pares.

</td>
<td>Existen planos paralelos.
Dos planos paralelos y secantes al tercero.

</td>
</tr>
</table>

Tabla 5.

2.6. Posición de planos respecto de la referencia



Plano XY

Vectores directores: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$. Un punto: $(0, 0, 0)$

$\pi: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda\,(1, 0, 0) + \mu\,(0, 1, 0)$

$\pi: z = 0$

Plano XZ

Vectores directores: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$. Un punto: $(0, 0, 0)$

$\pi: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda\,(1, 0, 0) + \mu\,(0, 0, 1)$

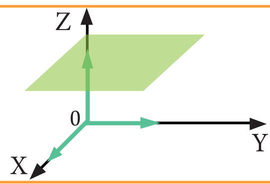
$\pi: y = 0$

Plano YZ

Vectores directores: $\vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$. Un punto: $(0, 0, 0)$

$\pi: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda\,(0, 1, 0) + \mu\,(0, 0, 1)$

$\pi: x = 0$

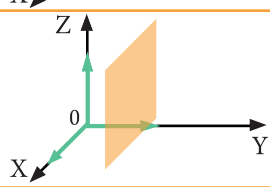


Plano paralelo al plano XY

Vectores directores: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$. Un punto: (a_1, a_2, a_3)

$\pi: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda\,(1, 0, 0) + \mu\,(0, 1, 0)$

$\pi: z = a_3$

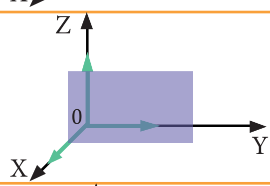


Plano paralelo al plano XZ

Vectores directores: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$. Un punto: (a_1, a_2, a_3)

$\pi: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda\,(1, 0, 0) + \mu\,(0, 0, 1)$

$\pi: y = a_2$

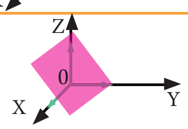


Plano paralelo al plano YZ

Vectores directores: $\vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$. Un punto: (a_1, a_2, a_3)

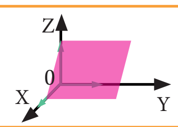
$\pi: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda\,(0, 1, 0) + \mu\,(0, 0, 1)$

$\pi: x = a_1$



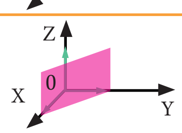
Plano paralelo al eje OX

$\pi : By + Cz + D = 0$



Plano paralelo al eje OY

$\pi : Ax + Cz + D = 0$



Plano paralelo al eje OZ

$\pi : Ax + By + D = 0$

Tabla 6.

Actividades

8. **Indica** la posición relativa de las siguientes rectas y planos respecto de los ejes y planos de referencia:

a. $\begin{cases} x - z - 5 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

b. $y = 0$

c. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

d. $x = 3$

e. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + k \\ z = 1 \end{cases}$

f. $3z = -5$

g. $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

h. $5y - 2x = 0$

3. POSICIÓN RELATIVA DE RECTA Y PLANO

Para determinar las posiciones relativas de una recta $r(A';\vec{v})$ y un plano $L(P;\vec{u},\vec{v})$, expresaremos la recta mediante sus ecuaciones implícitas, y el plano, mediante su ecuación general.

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases} \qquad L: Ax + By + Cz + D = 0$$

A continuación, consideramos el sistema formado por las tres ecuaciones y escribimos la matriz M y la matriz ampliada M', asociadas con dicho sistema:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right)$$

Si al reducir las matrices:

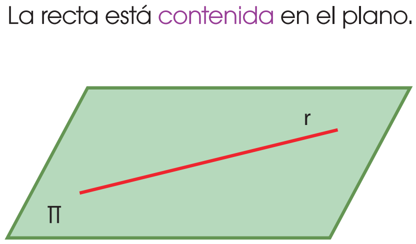
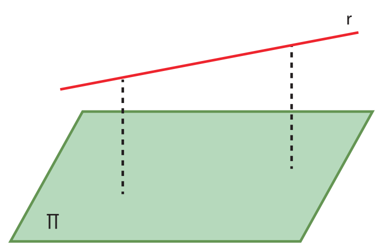
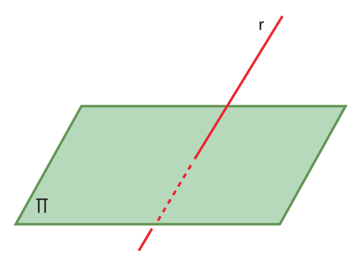
M tiene dos filas no nulas. M' tiene dos filas no nulas. **Sistema consistente indeterminado**: Sus soluciones dependen de un parámetro. La recta está contenida en el plano.	M tiene dos filas no nulas. M' tiene tres filas no nulas. **Sistema inconsistente**: No hay puntos comunes. La recta y el plano son paralelos.	M tiene tres filas no nulas. M' tiene tres filas no nulas. **Sistema consistente determinado**: La recta y el plano son secantes.
		

Tabla 7.

En caso de que la recta y el plano vengan dados por sus ecuaciones vectoriales o paramétricas, es conveniente determinar sus posiciones relativas a partir de sus vectores directores.

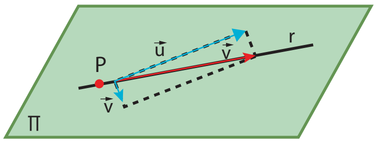
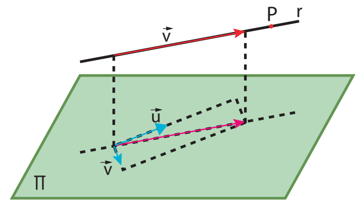
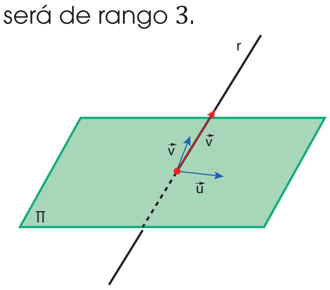
Recta contenida en el plano	Recta y plano paralelos	Recta y plano secantes
Si el vector director de la recta es suma de múltiplos de los vectores directores del plano, la recta está contenida en el plano o es paralela a él. En este caso, el rango de la matriz formada por las componentes de los tres vectores será 2. Para distinguir cada caso, bastará tomar un punto cualquiera de la recta y sustituir sus coordenadas en la ecuación del plano		Si al vector director de la recta no lo podemos expresar como suma de múltiplos de los vectores directores del plano, la recta y el plano serán secantes. En este caso, la matriz formada por las componentes de los tres vectores será de rango 3.
Si verifica dicha ecuación, la recta está contenida en el plano. 	Si no la verifica, la recta es paralela al plano. 	

Tabla 8.

4. ÁNGULOS ENTRE ELEMENTOS DEL ESPACIO

En la unidad 4, estudiamos la operación producto escalar entre dos vectores y vimos cómo nos permitía definir y determinar el ángulo entre ellos. Ahora, veremos cómo definir y determinar el ángulo que forman dos rectas, dos planos, o una recta y un plano.

4.1. Ángulo entre dos rectas

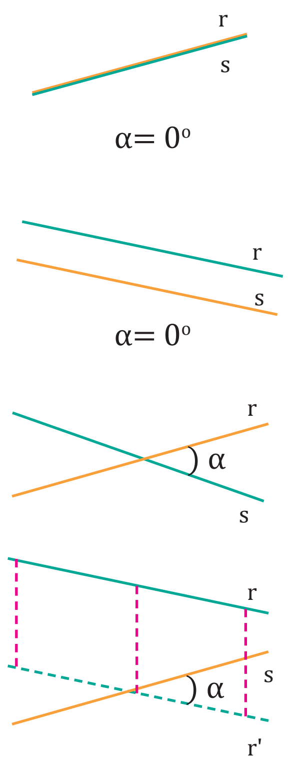
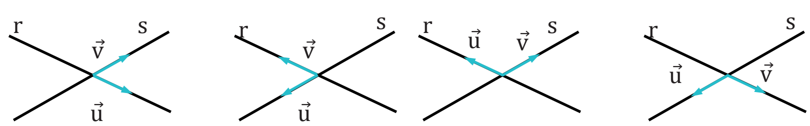


Fig. 5.

En el espacio, dos rectas pueden ser coincidentes, paralelas, secantes o pueden cruzarse. A los ángulos que determinan los definimos de manera diferente en cada caso. Así:

- Si dos rectas son coincidentes o paralelas, forman un ángulo de 0°.
- Si dos rectas son secantes, determinan cuatro ángulos, iguales en pares. Al menor de ellos lo definimos como el ángulo entre las rectas.
- Si dos rectas se cruzan, el ángulo entre ellas es el menor de los ángulos que forma la paralela a una de ellas que corta la otra.

Observa que, si tomamos un vector director de r y uno de s, el ángulo formado por estos vectores coincide con el ángulo entre las dos rectas, si es agudo, o con su suplementario, en el caso de ser obtuso.



$\widehat{\vec{u},\vec{v}} = \widehat{\vec{r},\vec{s}}$ $\qquad$ $\widehat{\vec{u},\vec{v}} = 180º - \widehat{\vec{r},\vec{s}}$

Por tanto, el coseno del ángulo α entre las dos rectas coincidirá, salvo en el signo, con el del ángulo que forman sus vectores directores:

$$\cos(\widehat{r,s}) = \cos\alpha = |\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})| = \left|\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\right| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores directores de r y s respectivamente. Entonces:

$$\alpha = \arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\ ;\ \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, resulta:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Ejemplo 7

Calculemos el ángulo que forman las rectas r y s.

$$r: \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{2} = z$$

$$s: \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Hallemos un vector director de r y otro de s:

- Un vector director de r es $\vec{v} = (5,2,1)$.
- Para hallar un vector director de la recta s, escojamos z como parámetro y resolvamos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss.

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 - \frac{1}{2}k \\ y &= 1 - \frac{3}{2}k \\ z &= k \end{aligned}\right\}$$ Un vector director es $\vec{u} = (1,3,-2)$.

Apliquemos la fórmula del producto escalar para conocer el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$:

$$\cos\alpha = \frac{|5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2}\ \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}}$$

$$\cos\alpha = 0.439 \Rightarrow \alpha = \arccos(0{,}439) = 63{,}95°$$

Las rectas r y s forman un ángulo de 63,95°.

4.2 Rectas perpendiculares

En la figura 6 podemos observar que dos rectas son perpendiculares cuando sus vectores directores lo son. Pero hemos visto que dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero. Entonces:

Dos rectas r y s son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores respectivos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es cero.

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

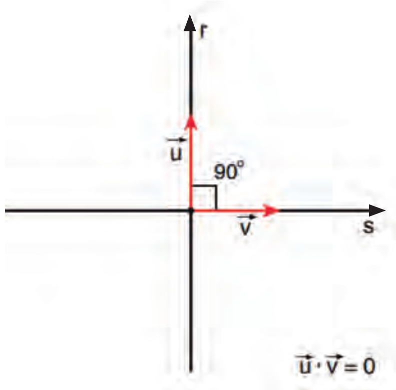


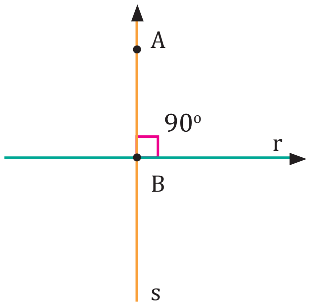
Fig. 6.

Así, podemos afirmar que las rectas r: $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(3, 2, 4)$ y s: $(x, y, z) = (1, 1, 3) + k(0, 2, -1)$ son perpendiculares, puesto que sus vectores directores respectivos cumplen que:

$$(3, 2, 4) \cdot (0, 2, -1) = 0$$

Ejemplo 8

Determinemos la ecuación vectorial de la recta s que pasa por el punto A y corta perpendiculares a la recta r, siendo $A = (1,0,2)$ y r: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + k(3, 2, 1)$.



Solo existe una recta que pasa por A y corta perpendicularmente a r.
Llamemos s a esta recta y B al punto común entre r y s.
Expresamos el punto B como punto de la recta r:

$$B = (2 + 3k, 1 + 2k, k)$$

El vector $(\overrightarrow{AB})$ es perpendicular al vector director de r ; por tanto, su producto escalar será 0:

$$(\overrightarrow{AB}) = (1 + 3k, 1 + 2k, k - 2)$$
$$(1 + 3k, 1 + 2k, k - 2) \cdot (3, 2, 1) = 0$$
$$3 + 9k + 2 + 4k + k - 2 = 0$$

$$14k = -3 \Rightarrow k = -\frac{3}{14} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{14}, \frac{8}{14}, -\frac{31}{14}\right)$$

La recta s es: $(x, y, z) = (1, 0, 2) + k(5, 8, -31)$.

Y TAMBIÉN: ¿?

Ángulo diedro es la región del espacio limitada por dos semiplanos que tienen una recta común, llamada *arista*.

Ángulo rectilíneo de un diedro es el ángulo plano que obtenemos al cortar el diedro con un plano perpendicular a la arista.

Ángulo diedro

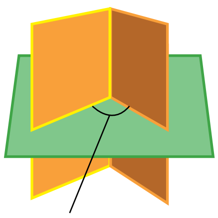


Fig. 7.

Ángulo rectilíneo del diedro

El vector normal es ortogonal al plano

Dados $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ y (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2), dos puntos de π, el vector determinado por estos puntos es
$v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Y, por ser puntos del plano, cumplen:

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$
$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$

$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$
$Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D$

Calculamos el producto escalar del vector normal, $\vec{n} = (A, B, C)$ por el vector $\vec{v}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} =$$
$$= (A, B, C) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) =$$
$$= A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) =$$
$$= Ax_2 + By_2 + Cz_2 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) =$$
$$= (-D) - (-D) = 0$$

Por tanto, el vector $\vec{n}$ es ortogonal a cualquier vector del plano.

Dos planos en el espacio pueden ser coincidentes, paralelos o secantes. Veamos cómo definimos en cada caso el ángulo entre ellos.

- Si los dos planos son coincidentes o paralelos, forman un ángulo de 0°.
- Si los dos planos son secantes, determinan cuatro ángulos diedros, iguales por pares. Al menor de ellos lo definimos como el ángulo entre los planos.

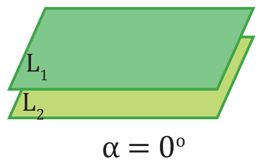


Fig. 8.

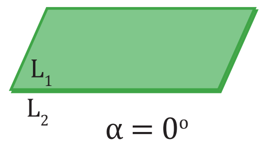


Fig. 9.

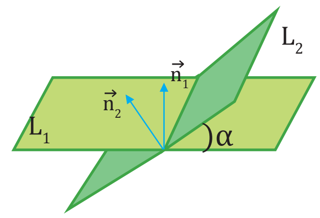


Fig. 10.

A un ángulo diedro le asignamos la medida del ángulo rectilíneo correspondiente. Para obtener la medida de este ángulo utilizaremos el vector normal o característico de cada uno de los planos.

Observa en la figura 10 que el ángulo α entre dos planos L_1 y L_2, con vectores normales $(\vec{n}_1)$ y $(\vec{n}_2)$, coincide con el ángulo entre dichos vectores, si es agudo, o con su suplementario, en el caso de ser obtuso.

Por tanto, el coseno del ángulo α entre los dos planos coincidirá, excepto en el signo, con el del ángulo que forman sus vectores normales.

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos\alpha = |\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})| = \left|\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

siendo $(\vec{n}_1)$ y $(\vec{n}_2)$ vectores normales de L_1 y L_2, respectivamente. Entonces:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right), \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Si $(\vec{n}_1) = (A_1, B_1, C_1)$ y $(\vec{n}_2) = (A_2, B_2, C_2)$, resulta:

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Ejemplo 9

Dados los planos $L_1: 3x - y + 2z + 1 = 0$ y $L_2: 2x + y - 5z - 1 = 0$, determinemos el ángulo que forman.

Escribimos un vector normal a L_1, $\vec{n}_1 = (3, -1, 2)$ y otro a L_2, $n_2 = (2, 1, -5)$.

Calculamos el ángulo que forman $(\vec{n}_1)$ y $(\vec{n}_2)$:

$$\alpha = \arccos\frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-5)|}{\sqrt{9 + 1 + 4}\,\sqrt{4 + 1 + 25}} = \arccos(0{,}244) = 75{,}88°$$

4.3 Planos perpendiculares

En la figura puedes apreciar que dos planos serán perpendiculares cuando sus vectores normales lo sean. Pero hemos visto que dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero. Entonces:

Dos planos L_1 y L_2 son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores normales respectivos, $(\vec{n_1}) = (A_1, B_1, C_1)$ y $(\vec{n_2}) = (A_2, B_2, C_2)$ es cero.

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow (\vec{n}_1) \cdot (\vec{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Entonces, podemos afirmar que los planos $L_1: 2x - 3y + z - 4 = 0$ y $L_2: y + 3z - 2 = 0$ son perpendiculares, puesto que sus vectores normales respectivos cumplen:

$$(2, -3, 1) \cdot (0, 1, 3) = 0$$

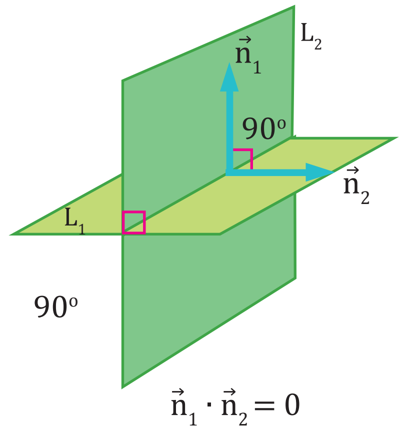
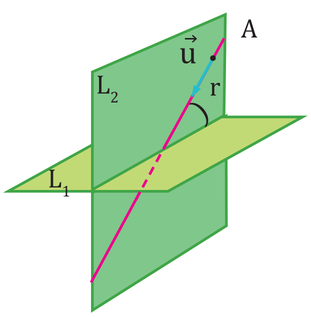


Fig.11.

Ejemplo 10

Hallemos la ecuación de un plano L_2, perpendicular al plano L_1: $x + 3y - z + 1 = 0$ y que contiene a la recta $r: (x, y, z) = (1, 3, 4) + k(-1, -2, 5)$.



Observamos en la figura que solo existe un plano que contenga a r y sea perpendicular a L_1.

- Como L_2 ha de contener la recta r, cualquier punto y cualquier vector director de r lo serán también del plano. Así, $A=(1, 3, 4)$ es un punto de L_2 y $\vec{u} = (-1, -2, 5)$, un vector de L_2.
- Como L_2 ha de ser perpendicular a L_1, el vector normal asociado a L_1 será un vector director de L_2, $\vec{v} = (1, 3, -1)$.

Puesto que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, L_2 es el plano determinado por $A, \vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$L_2: <x, y, z> = <1, 3, 4> + \lambda<-1, -2, 5> + \mu<1, 3, -1>$$

Y su ecuación general dada por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = 3 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 4 + 5\lambda - \mu \end{cases}$$

$L_2: 13x - 4y + z - 5 = 0.$

Y TAMBIÉN: ¿?

- Si tenemos un plano π expresado mediante su ecuación vectorial o sus ecuaciones paramétricas, podemos obtener un vector normal al plano efectuando el producto vectorial de sus vectores directores.

  Así, si $\pi: \vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, un vector normal es $\vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

- Podemos escribir la ecuación general de un plano conocidos un punto de este y un vector normal. Por ejemplo, la ecuación general del plano determinado por el vector normal $n = (1, 0, 3)$ será:

  $$\pi: x + 3z + D = 0$$

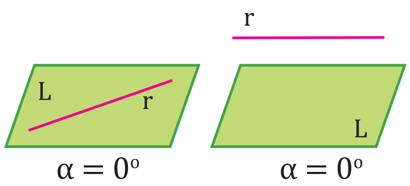
Si además contiene el punto $P = (0, 0, 1)$, cumplirá:

$$0 + 3 \cdot 1 + D = 0 \, ; D = -3$$

Por tanto, el plano es:

$$\pi: x + 3z - 3 = 0$$

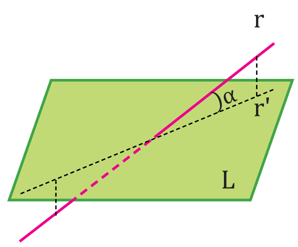
4.4. Ángulo entre recta y plano



■ Fig. 12.

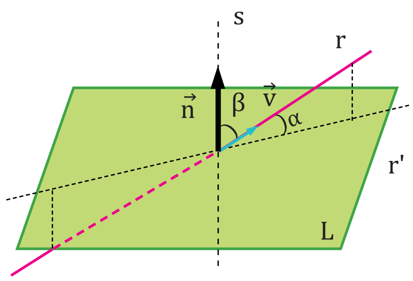
Una recta puede estar incluida en un plano o bien ser paralela o secante a él. Veamos cómo definir, en cada caso, el ángulo entre ellos.

- En la figura 12 la recta está incluida en el plano o ambos son paralelos, recta y plano forman un ángulo α de $0°$
- En la figura 13 la recta y el plano son secantes, definimos el ángulo α entre recta y plano como el ángulo menor que forma la recta con una línea sobre el plano.



■ Fig. 13.

Observa la figura 14. El ángulo α que forman la recta r y el plano L es el complementario del ángulo β que forma la recta r con una recta s perpendicular al plano. Además, el ángulo entre las rectas r y s coincide con el ángulo entre el vector director de la recta r y el vector normal al plano L, si es agudo, o con su suplementario, en el caso de ser obtuso. Por tanto, el seno del ángulo α coincidirá con el coseno del ángulo β . Y este coincidirá, salvo en el signo, con el del ángulo que forman un vector director de la recta y un vector normal al plano.



■ Fig. 14.

$$\text{sen}\ (\widehat{r, L}) = \text{sen}\ \alpha = \cos\ (\widehat{r, s}) = \cos\ \beta = |\cos\ (\widehat{v, n})| = \left| \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}|\ |\vec{n}|} \right|$$

siendo $\vec{v}$ el vector director de r, y $\vec{n}$ el vector normal de L.

$$\alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}|\ |\vec{n}|} \right), \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $n = (A, B, C)$, resulta:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{|v_1A + v_2B + v_3C|}{\sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo 11

Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

$$r: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 5 \end{cases} \qquad \pi: 3x - 4y + 5z - 1 = 0$$

Escribimos un vector director de la recta y un vector normal al plano:

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \qquad \vec{n} = (3, -4, 5)$$

Hallamos el ángulo α :

$$\alpha = \text{arc sen} \frac{|v_1A + v_2B + v_3C|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\ \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \text{arc sen} \frac{1}{10} = 5{,}74°$$

Si el vector director de la recta es paralelo al vector normal del plano, la recta y el plano son perpendiculares. Esto se comprueba si $r \perp L \Leftrightarrow \frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}$.

5. DISTANCIAS ENTRE ELEMENTOS DEL ESPACIO

A continuación veremos cómo definir y calcular la distancia entre diferentes elementos geométricos del espacio.

5.1. Distancia entre dos puntos

Dados $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, dos puntos en el espacio, definimos la distancia entre ellos como sigue.

La distancia entre los puntos A y B es el módulo del vector $(\overrightarrow{AB})$.

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Esta distancia cumple las siguientes propiedades:

- $d(A,B) \geq 0$, y si $d(A,B) = 0$, entonces $A = B$
- Propiedad simétrica: $d(A, B) = d(B, A)$
- Desigualdad triangular: $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ siendo $C = (c_1, c_2, c_3)$

Determinaremos la distancia entre dos elementos cualquiera del espacio a partir de la distancia entre dos puntos, teniendo en cuenta que siempre se tratará de la menor de las distancias posibles entre los puntos de uno de los elementos y los puntos del otro.

5.2. Distancia de un punto a una recta

La distancia entre un punto P y una recta r, d (P, r), es la mínima de las distancias entre P y un punto cualquiera de la recta.

- Si P es un punto de la recta r, la distancia es 0.
- Si P no es un punto de la recta r, la distancia de P a r es el módulo del vector perpendicular a r con origen en P.

Veamos cómo calcular más fácilmente la distancia de un punto P a una recta r si el punto no pertenece a la recta.

Sean un punto Q y $\vec{v}$ un vector director de la recta.

Observa la figura. El área del paralelogramo determinado por $(\overrightarrow{QP})$ y por $\vec{v}$ es el módulo del producto vectorial de ambos vectores, $S_p = |(\overrightarrow{QP}) \cdot \vec{v}|$.

Pero el área de un paralelogramo también viene dada por el producto de su base por su altura. Entonces, igualando las dos expresiones del área y despejando d(P, r), obtenemos la distancia buscada:

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

Dados un punto P y una recta r, llamamos proyección ortogonal del punto P sobre la recta r al punto P′. Este punto P′ es la intersección de la recta r con el plano que contiene el punto P y es perpendicular a ella.

Para hallar la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r seguimos estos pasos:

- Hallamos el plano π, perpendicular a r y que contiene a P.
- Calculamos el punto P′, intersección de π y r.

Así, dados el punto $P = (2, 4, 1)$ y la recta r:
$r: (x, y, z) = (2, 3, -1) + k(1, 2, 1)$ para hallar la proyección ortogonal procedemos del siguiente modo:

- Hallamos el plano π, perpendicular a r y que contiene a P.

  Por ser perpendicular a r, el vector director de r será un vector normal de π. Luego:

  $\pi: x + 2y + z + D = 0$

  Y, como ha de contener el punto P, se tiene:

Así, la ecuación de π es:

$\pi: x + 2y + z - 11 = 0$

- Escribimos la recta r mediante sus ecuaciones implícitas y hallamos el punto de intersección de π y r:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - 1 &= 0 \\ x - z - 3 &= 0 \\ x + 2y + z - 11 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow P' = \left(\frac{8}{3}, \frac{13}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

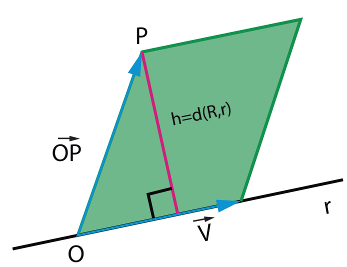


Fig. 15.

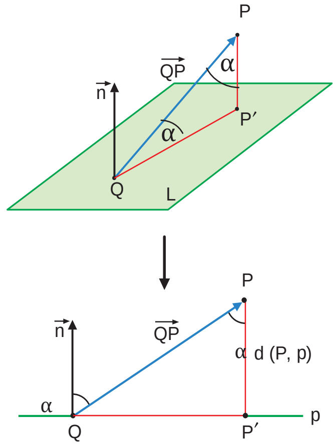


Fig. 16.

Y TAMBIÉN: ¿?

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Dados un punto P y un plano π, llamamos proyección ortogonal del punto P sobre el plano π al punto P'. Este punto P' es la intersección del plano π con la recta que contiene el punto P y es perpendicular a π.

Para hallar la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π seguimos estos pasos:

- Hallamos la recta r, perpendicular al plano π y que contiene a P.
- Calculamos el punto P', intersección de r y π.

Así, por ejemplo, dados el punto P y el plano π:

$$P = (-2, 0, 3)$$

$$\pi: 4x + 2y - 4z + 3 = 0$$

para hallar la proyección ortogonal procedemos del siguiente modo:

- Hallamos la recta r, perpendicular a π y que contiene a P:

$$(x, y, z) = (-2, 0, 3) + k\,(4, 2, -4)$$

- Escribimos la recta r mediante sus ecuaciones implícitas y hallamos el punto de intersección de r y π:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ 4x + 2y - 4z + 3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P' = \left(\frac{-1}{9}, \frac{17}{18}, \frac{10}{9}\right)$$

5.3. Distancia de un punto a un plano

La distancia entre un punto P y un plano L, $d(P, L)$, es la mínima de las distancias entre P y un punto cualquiera del plano.

- Si P es un punto del plano L, la distancia es 0.
- Si P no es un punto del plano L, la distancia de P a L es el módulo del vector $(\overrightarrow{PP'})$ con origen en P perpendicular al plano.

Veamos cómo calcular más fácilmente la distancia entre un punto P y un plano L si el punto no pertenece al plano.

Sean un punto $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y un vector normal $n = (A, B, C)$ del plano L.

Observa la figura. La distancia entre el punto y el plano, $d(P, \pi)$, es el módulo del vector, y a este lo podemos calcular a partir del vector y del ángulo α, pues:

$$|(\overrightarrow{PP'})| = |(\overrightarrow{QP})| \cdot \cos\alpha$$

Pero el ángulo α también puede obtenerse a partir del producto escalar de los vectores $(\overrightarrow{QP})$ y $\vec{n}$:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{QP}|\ |\vec{n}|}, \ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Así pues, la distancia entre P y L es:

$$|\overrightarrow{PP'}| = |\overrightarrow{QP}| \cdot \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{QP}|\ |\vec{n}|} = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Si expresamos estos vectores en sus componentes y las coordenadas de P son $P = (p_1, p_2, p_3)$, obtenemos:

$$|PP'| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) \cdot (A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$|PP'| = \frac{|A(p_1 - q_1) + B(p_2 - q_2) + C(p_3 - q_3)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Como el punto Q pertenece al plano, se cumple:

$$Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D = 0 \Rightarrow Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 = -D$$

Así pues, la distancia entre un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y un plano L, de ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$ es:

$$d(P, L') = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5.4. Distancia entre dos rectas

La distancia entre dos rectas, r y r', d(r, r') es la mínima distancia entre un punto cualquiera de r y un punto cualquiera de r'.

- Si las rectas son coincidentes o secantes, su distancia es cero, $d(r, r') = 0$.
- Si las rectas son paralelas, su distancia se calcula tomando un punto cualquiera de una de las dos rectas, $P \in r$ o $P' \in r'$, y hallando su distancia a la otra recta, $d(r, r') = d(P, r') = d(P', r)$.
- Si las rectas se cruzan, hemos de deducir una fórmula general para calcular su distancia. Así consideramos un punto A y un vector director $\vec{v}$ de la recta r y un punto A' y un vector director ($\vec{v}'$) de la recta r'.

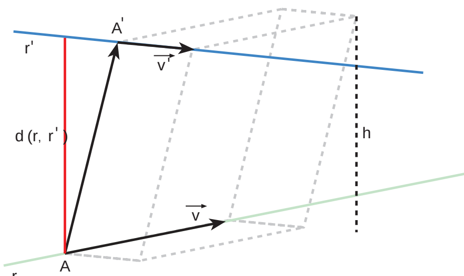


Fig. 17.

Unimos los puntos A y A′. El volumen del paralelepípedo determinado por $[\overrightarrow{AA'}]$, $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ es el valor absoluto del producto mixto de estos vectores, $V_p = |[[\overrightarrow{AA'}] \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}']|$.

Pero este volumen también se calcula mediante el producto del área de la base por la altura, $V_p = |\vec{v} \cdot \vec{v}'| \cdot d(r, r')$. Por tanto:

$$d(r, r') = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}'|}{|\vec{v} \cdot \vec{v}'|}$$

Ejemplo 12

Calculemos la distancia entre la recta $r:(x, y, z) = (2, 1, 3) + k(2, -1, 1)$ y la recta $r':(x, y, z) = (-1, -1, 4) + k(1, 3, -2)$.

En primer lugar, determinamos su posición relativa. Para ello, comprobamos si sus vectores directores son paralelos:

$$\vec{v} = (2, -1, 1) \quad \vec{v}' = (1, 3, -2) \qquad \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow r \text{ y } r' \text{ se cortan o se cruzan.}$$

Escogemos un punto A de r y un punto A' de r' y vemos la posición de las rectas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz tiene una fila nula, $\overrightarrow{AA'} = k\vec{v} + m\vec{v}'$, por tanto, las rectas se cortan: $d(r, r') = 0$

Y TAMBIÉN: ¿?

Dadas dos rectas $r(A; \vec{v})$ y $r'(A'; \vec{v})$:

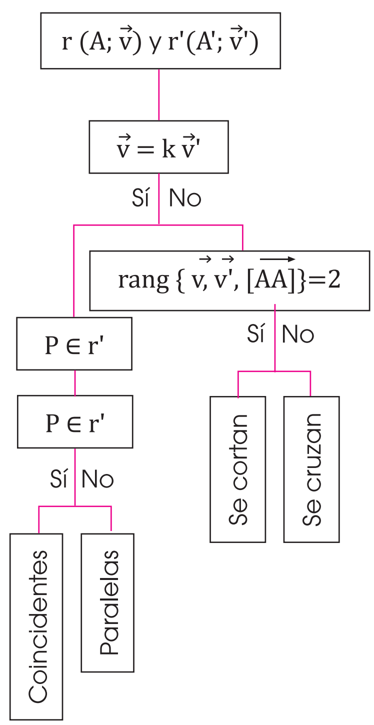
$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y - C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y - C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} A_3x + B_3y - C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y - C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Para determinar su posición relativa, consideramos la matriz M y la matriz ampliada M′, asociadas al sistema formado por las ecuaciones implícitas de r y r′, y hallamos sus rangos:

- Las rectas son coincidentes si rang (M) = rang (M′) = 2.
- Las rectas son paralelas si rang (M) = 2 y rang (M′) = 3.
- Las rectas se cortan en un punto si rang (M) = rang (M′) = 3.
- Las rectas se cruzan si rang (M) = 3 y rang (M′) = 4.

También podemos efectuar la siguiente clasificación:



Y TAMBIÉN: ¿?

El método científico es **inductivo**: el científico realiza experiencias en las que va modificando de una en una las variables que pueden influir en el experimento, hasta inducir una ley que las relaciona. La ley inducida, para que sea cierta, debe cumplirse siempre y ser reproducible en otras condiciones.
Pero no siempre los científicos utilizan el método inductivo; por ejemplo, Einstein elaboró la teoría de la relatividad especial utilizando un método **deductivo**, partiendo de dos postulados y desarrollando la teoría de forma teórica. También Newton utilizó este método para enunciar la ley de gravitación universal.

Y TAMBIÉN: ¿?

Para determinar la posición relativa de los planos L y L' consideramos la matriz M y la matriz ampliada M', asociadas al sistema formado por las ecuaciones generales de L y L', y hallamos sus rangos:
$L: Ax + By + Cz + D = 0$
$L: A'x + B'y + C'z + D' = 0$

- Si $\text{rang}(M) = \text{rang}(M') = 1$, los planos son coincidentes.
  Equivale a:
  $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$
- Si $\text{rang}(M) = 1$ y $\text{rang}(M') = 2$, los planos son paralelos.
  Equivale a:
  $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$
- Si $\text{rang}(M) = \text{rang}(M') = 2$, los planos se cortan en una recta.
  Equivale a:
  $$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \text{ o } \frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'} \text{ o } \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

5.5. Distancia entre dos planos

Para calcular la distancia entre dos planos cualquiera, hemos de tener en cuenta su posición relativa.

- Si los planos son coincidentes o secantes, su distancia es cero, $d(L, L') = 0$.
- Si los planos son paralelos, calculamos su distancia tomando un punto de uno de los planos y hallando su distancia al otro plano:

$$d(L, L') = d(P, L') = d(P', L), \text{ siendo } P \in L \text{ y } P' \in L'$$

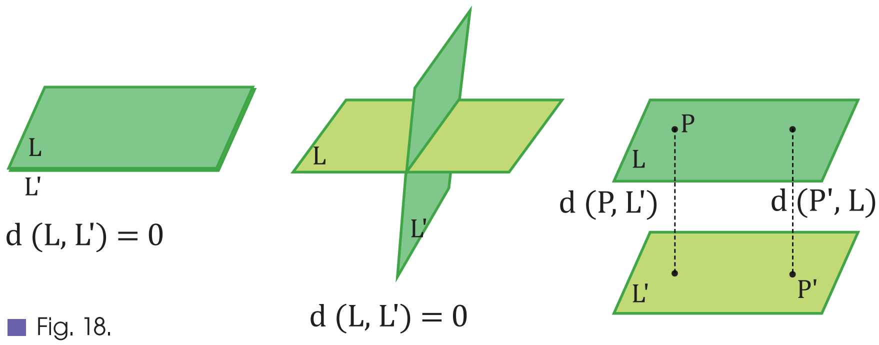


Fig. 18.

Ejemplo 13

Hallemos la distancia entre los siguientes planos:

$$L: 2x - 4y + 4z + 3 = 0 \text{ y } L': x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Resolvemos:

Como se cumple la relación:

$$\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} \neq \frac{3}{-1} \Rightarrow \text{los planos L y L' son paralelos.}$$

Consideramos un punto P' de L', por ejemplo $P' = (1, 0, 0)$, y hallamos la distancia desde este punto P' a L:

$$d|L, L'| = d(P', L) = \frac{|2 \cdot 1| - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{5}{6}$$

Otra manera sencilla de calcular la distancia entre dos planos paralelos, $L: Ax + By + Cz + D = 0$ y $L': Ax + By + Cz + D' = 0$, consiste en utilizar sus distancias al origen de coordenadas. As,í obtenemos la expresión:

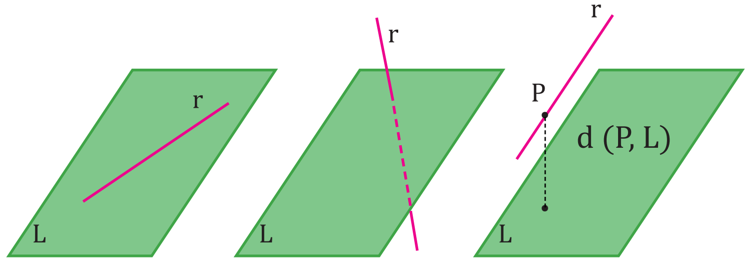
$$d(L, L') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Así, por ejemplo, la distancia entre los planos $L: x + 3y - \sqrt{6}z - 4 = 0$ y $L': x + 3y - \sqrt{6}z + 1 = 0$ es:

$$d(L, L') = \frac{|-4 - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 6}} = \frac{5}{4}$$

5.6. Distancia entre recta y plano

Observamos las posiciones relativas de una recta y un plano para deducir cómo calcular las distancias.



$d\ (r, L) = 0$ $\quad$ $d\ (r, L) = 0$

Fig. 19.

- Si la recta está incluida en el plano o si la recta y el plano son secantes, su distancia es cero, $d(r, L) = 0$
- Si la recta y el plano son paralelos, calculamos su distancia tomando un punto P cualquiera de la recta r y hallando su distancia al plano L.

$$d(r, L) = d(P, L) \text{ donde } P \in r$$

Ejemplo 14

Hallemos la distancia entre:

a. La recta $r: x - 2 = y = z + 1$ y el plano $L: x + y - 2z + 3 = 0$.

b. La recta $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(1, 4, -3)$ y el plano $L: x + y + 2z - 1 = 0$.

Resolvemos:

a. Escribimos las ecuaciones implícitas de la recta r y consideramos la matriz M y la matriz ampliada M', asociadas al sistema formado por las ecuaciones de r y L, para hallar su posición relativa.

$$r: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como M tiene dos filas no nulas y M' tiene tres, r y L son paralelos.
Para hallar la distancia de r a L, calculamos la distancia de un punto de la recta al plano L; consideramos, por ejemplo, $P = (2, 0, -1)$.

$$d|r, L'| = d(P, L) = \frac{|1\cdot 2 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$$

b. Consideramos el vector director de la recta, $\vec{v} = (1, 4, -3)$, y el vector normal del plano, $\vec{n} = (1, 1, 2)$, y efectuamos su producto escalar:

$$(1, 4, -3)\cdot(1, 1, 2 \geq -1 \neq 0$$

La recta y el plano no son paralelos y, por tanto, $d(r, L) = 0$.

Actividades

9. **Determina**, la distancia entre la recta r y el plano x.

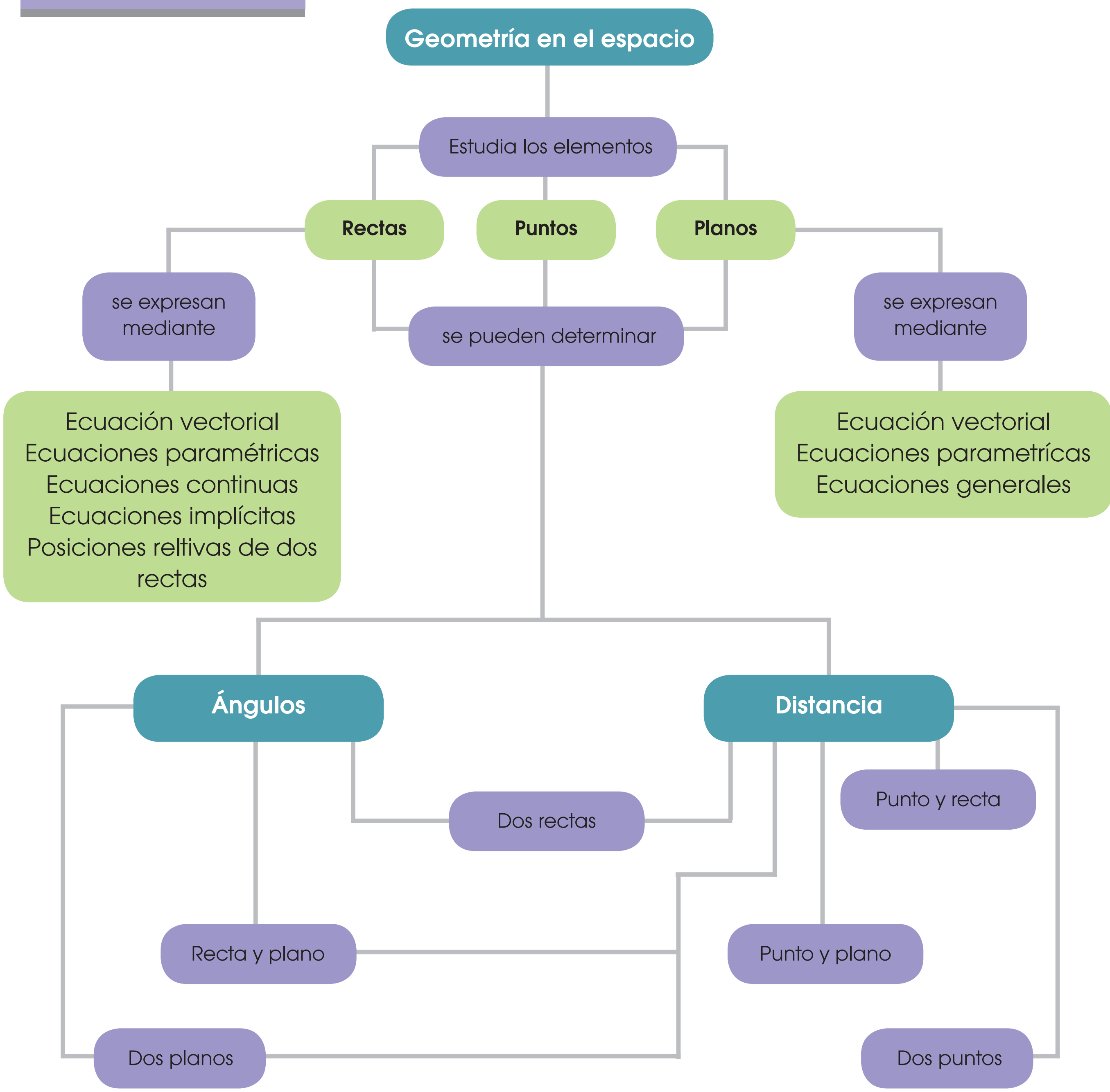
$$r: \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \qquad x: 3x + y - z + 4 = 0$$

10. Sean las rectas $r: \frac{x+1}{2} - \frac{y}{3} - \frac{z}{-2}$ y $s: x = \frac{y+1}{3} - z$

a. **Halla** la ecuación general del plano x que contiene a r y es paraleo a s.

b. **Determina** la distancia del plano x a la recta s.

5 Resumen



Geometría en el espacio
Estudia los elementos
Rectas
Puntos
Planos
se expresan mediante
se pueden determinar
se expresan mediante
Ecuación vectorial
Ecuaciones paramétricas
Ecuaciones continuas
Ecuaciones implícitas
Posiciones reltivas de dos rectas
Ecuación vectorial
Ecuaciones parametrícas
Ecuaciones generales
Ángulos
Distancia
Punto y recta
Dos rectas
Recta y plano
Punto y plano
Dos planos
Dos puntos

Problemas resueltos

A

1. **Halla** la ecuación de la recta que contiene el punto $A = (2, -3, 0)$ y corta las rectas r y r'.

$r : (x, y, z) = (5, 3, -1) + k(1, 1, 1)$

$r': \dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 2}{4} = \dfrac{z}{2}$

Solución

Así, observamos que la recta que buscamos, a la que llamamos s, es la intersección de los planos L y L', siendo L el plano determinado por la recta $r(P;\vec{v})$ y el punto A y L' el determinado por la recta $r'(P';\vec{v}')$ y el punto A.

Ecuación del plano L

Además del punto $A=(2, -3, 0)$ y del vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$, otro vector director puede ser $(\overrightarrow{AP})$, siendo $P = (5, 3, -1)$:

$$\vec{u} = (\overrightarrow{AP}) = (5 - 2, 3 - (-3), -1 - 0) = (3, 6, -1)$$

La ecuación vectorial de $L(A;\vec{v},\vec{u})$ es:

$(x, y, z) = (2, -3, 0) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(3, 6, -1)$

Y su ecuación general es:

$L: 7x - 4y - 3z - 26 = 0$

Ecuación del plano L'

Además del punto $A=(2,-3,0)$ y del vector $\vec{v}' = (1, 4, 2)$, otro vector director puede ser $(\overrightarrow{AP'})$, siendo $P'= (2, -2, 0)$:

$$\vec{u}' = \overrightarrow{AP'} = (2 - 2, -2 - (-3), 0 - 0) = (0, 1, 0)$$

La ecuación vectorial de $L'(A; \vec{v}', \vec{u}')$ es:

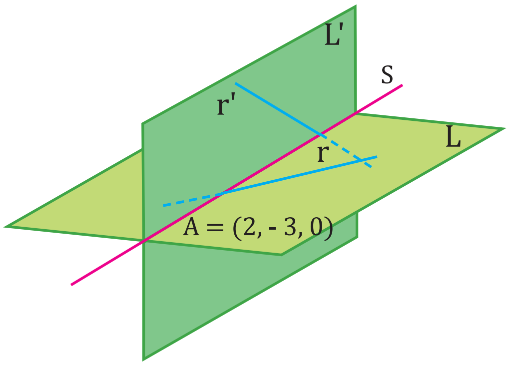
$$(x, y, z) = (2, -3, 0) + \lambda(1, 4, 2) + \mu(0, 1, 0)$$

Y su ecuación general es:

$$L': 2x - z - 4 = 0$$

La recta s es la intersección de los planos L y L'. Por tanto, sus ecuaciones implícitas serán:

$$s = \begin{cases} 7x - 4y - 3z - 26 = 0 \\ 2x - z - 4 = 0 \end{cases}$$



2. **Determina** el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

$$r = \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad A = (1, 1, 2)$$

Solución

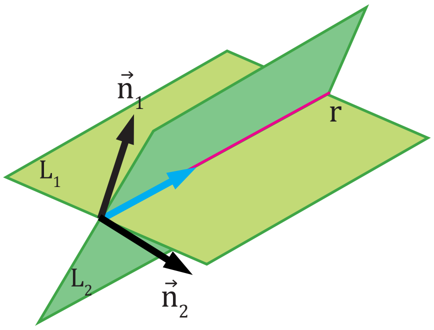
El vector director $\vec{v}$ de la recta será el vector normal del plano que buscamos. Para calcularlo, tenemos en cuenta que podemos interpretar las ecuaciones implícitas de la recta como las ecuaciones generales de dos planos cuya intersección es r.

Observamos que el producto vectorial de los vectores normales de estos planos nos da directamente el vector director de la recta:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow (-1, -1, 1)$$

El plano será: $-x - y + z + D = 0$. Como $A = (1, 1, 2)$ pertenece al plano, $-1 - 1 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = 0$. Así:

$$L: -x - y + z = 0, \text{ o bien, } L: x + y - z = 0$$



Ejercicios y problemas

1 Rectas y planos en el espacio

1. Dados los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ y $C = (1, 4, 2)$, **comprueba** si pertenecen a r o a r′.

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = 3k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

2. **Determina** m y n de forma que la recta r pase por el punto $A = (3, 2, -4)$.

$$r: (x, y, z) = (3, m, -1) + k\,(n, 1, -3)$$

3. **Determina** la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (2, 1, 0)$ y $B = (0, 3, 2)$ y **exprésala** como intersección de dos planos.

4. **Escribe** las ecuaciones generales de los planos determinados por:

a. El punto $A = (1, -1, 3)$ y los vectores directores:

$\vec{u} = (2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 4, -2)$

b. Los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (1, 1, 1)$.

c. El punto $A = (3, 1, 4)$ y la recta r.

$$r: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$$

d. El punto $A = (2, 4, 0)$ y que es paralelo al plano de ecuación $\pi: 3x - 2y + 5z + 1 = 0$.

5. **Determina** la ecuación del plano con vector director $\vec{u}' = (1, 2, 3)$ y que contiene la recta que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v}' = (1, 1, 1)$.

6. **Di** si las rectas r y r′ determinan un plano.

$$r: \begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

7. **Determina** la posición relativa de las rectas de $\mathbb{R}^3$, r y r′.

$$r: x - 1 = y = \frac{z-1}{2}$$

$$r': \frac{x-4}{2} = y - 2 = z - 4$$

8. **Determina** la posición de estos pares de rectas y, si son secantes, **halla** el punto de corte:

a. $r: (x, y, z) = (1, 7, 0) + k\,(2, 3, 1)$

$$r': \frac{x}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{1}$$

b. $$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$

$$r': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

c. $$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$r': (x, y, z) = (4, 1, 3) + k\,(3, -5, 0)$

d. $$r: \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 - 5k \\ z = 2 + 4k \end{cases}$$

$$r': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{4}$$

e. $r: (x, y, z) = (2, 0, -3) + k\,(1, 5, -4)$

$$r': \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

9. **Considera** las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} \beta x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

–**Halla** el valor del parámetro β para el que se cortan y **calcula** su punto de corte.

10. **Calcula** la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta intersección de los siguientes planos:

$L_1: x + 2z + 1 = 0$

$L_2: x + 3y - z + 2 = 0$

–**Describe** el procedimiento empleado.

11. **Da** la posición relativa de los siguientes planos:

a. $L: 3x - 2y + z - 3 = 0$

$L': x + y - 2 = 0$

b. $L: \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$ $L': x - y - z - 3 = 0$

c. $L: (x, y, z) = (1, -7, 0) + \lambda (1, -3, 4) + \mu(2, -1, 0)$

$L': 4x + 8y + 5z - 3 = 0$

12. **Considera** la recta r y **explica** por qué el plano π la contiene para cualquier valor de λ.

$$r': \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$L: (a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + (c + \lambda c')z = d + \lambda d'$

–**Calcula** la ecuación del plano que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ y contiene la recta r'.

$$r': \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

13. **Determina** el valor de β para que los tres planos siguientes se corten en una misma recta:

$L_1: x + y = 1$; $L_2: \beta x + z = 0$

$L_3: x + (\beta + 1) y + \beta z = \beta + 1$

14. **Halla** las ecuaciones de las dos rectas en que el plano L_1, de ecuación $L_1: x + y + z = 1$, corta los planos $L_2: x - y - z = 0$ y $L_3: x - y + z = 0$, y **averigua** la posición relativa de dichas rectas.

15. **Estudia** la posición relativa de las rectas y los planos cuyas ecuaciones respectivas son:

a. $L: x + 3y + z - 1 = 0$

$r: \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b. $L: 5x + y = 0$

$r: \begin{cases} x - 5y + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

16. **Halla** el valor de m para que s y s' sean paralelas.

$$s: (x, y, z) = (3, 2, 1) + k(-4, 1, 9)$$

$$s': \begin{cases} x + my - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

17. **Considera** las rectas r y s, y **determina** para qué valor de m están contenidas en un mismo plano.

$$r: \frac{x - 1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z - m}{-1}$$

$$s: \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z + 1}{2}$$

–Si $m = 1$, **halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, 1, 2)$ y corta a r y a s.

18. **Calcula** el ángulo formado por las rectas r y s en cada uno de los siguientes casos:

a. $r: (x, y, z) = (-1, 0, -3) + k(3, 2, 2)$

$s: (x, y, z) = (2, -3, 0) + k(2, -2, -1)$

b. $r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z - 1}{1}$

$s: \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z - 1}{1}$

c. La recta r pasa por los puntos $A = (1, 0, 3)$ y $B = (2, 1, 1)$ y las ecuaciones implícitas de s son $x = 0$ e $y = 3$.

19. **Calcula** el ángulo que determinan en cada caso los siguientes pares de planos:

a. $L: x - 2y + z + 3 = 0$ y $L': y + z - 1 = 0$

b. $L: (x, y, z) = (3, 1, 5) + \lambda(1, -3, 4) + \mu(0, 1, 0)$ y $L': x = 0$

20. **Determina** el ángulo que forman la recta r y el plano L en los siguientes casos:

a. $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + k(1, -2, 4)$

$L: x - y + 3z - 1 = 0$

b. $r: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$ $L: 3x - z + 1 = 0$

c. $r: (x, y, z) = (3, -2, 0) + k(1, 4, -3)$

$L: (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(1, -2, 1) + \mu(3, 0, 1)$

21. **Determina** la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: (x, y, z) = (2, 3, -5) + k(1, 2, -3)$.

Para finalizar

1 **Encuentra** la ecuación de la recta s que pasa por un punto $A=(1,1,1)$, es paralela al plano L y está situada en el mismo plano que la recta r.

$L: x - 2y - z = 0$

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

2 **Considera** las rectas r y s dadas a continuación, y **describe** sus posiciones relativas según el valor del parámetro m. **Halla** el punto de corte, si existe.

$$r: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} y - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 2z - m = 0 \end{cases}$$

3 **Halla** el plano L perpendicular a la recta s y que pasa por el punto $B = (0, 1, 2)$ y el plano L' que contiene a s y es paralelo a s'.

$$s: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$s': \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ -x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

4 **Determina** las ecuaciones de todos los planos paralelos cuya distancia al plano $L: 2x - 3y + z - 1 = 0$ sea igual a $3\sqrt{2}$.

5 **Halla** la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (1, 2, 3)$ y es perpendicular al eje OZ.

6 **Calcula** el perímetro P del triángulo cuyos vértices se sitúan en los puntos: $A = (2, 1, 5)$; $B = (0, 1, 3)$ y $C = (2, -1, 4)$.

7 **Calcula** la distancia del punto $A = (1, -4, 2)$ a la recta $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(2, 3, 1)$.

8 Dados la recta $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4z \end{cases}$ y el punto $P = (3, 4, 1)$, **calcula** la distancia entre ellos y **halla** el plano L que los contiene a ambos.

9 **Calcula** la distancia del punto $A = (3, 0, -2)$ al plano $L: 3x - y + z + 1 = 0$.

10 **Halla** la ecuación de la recta s que pasa por el punto $A = (1, 0, -2)$ y corta las rectas r y r'.

$r: (x, y, z) = (0, 1, -1) + k(-1, 1, 3)$

$$r' = \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

11 **Halla** la ecuación de la recta s que pasa por un punto $A = (1, 1, 1)$, es paralela al plano L y está situada en el mismo plano que la recta r.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

Los Simpson y las tres dimensiones

Seguramente conoces a los Simpson, la familia de la serie animada creada por Matt Groening, pero ¿sabías que varios de los escritores de la serie son expertos matemáticos? Estos escritores no se han olvidado de su amor por los números mientras crean los episodios de la serie, y frecuentemente insertan chistes, bromas, o referencias matemáticas que pueden fácilmente pasarse por alto.

Quizá el más conocido y claro ejemplo se encuentra en el episodio *La casita del horror VI*, donde Homero cruza un extraño portal que lo transporta a la hasta entonces desconocida tercera dimensión. En este lugar, parecido a una simulación por computadora, se pueden ver muchos cuerpos geométricos, ecuaciones y fórmulas que atemorizan a Homero.



http://goo.gl/DbsvMe

SENTIDO CRÍTICO

El poema de un ingeniero

El siguiente poema se encuentra en el libro *El Club de la Hipotenusa de Claudi Alsina*, y se acredita al ingeniero Frederic Massalle Guarné. **Cuenta** sus sílabas y **encuentra** su secreto:

Vas a leer, y jamás desprecia
el rimado ardid, muy fácil memorial,
indicando función diametral
que «pi» —del alfabeto— llamó Grecia
al darnos pura luz, que aparecía
con la fecunda Geometría.

SI YO FUERA....

Ingeniero mecánico



http://goo.gl/vcBrMA

El trabajo de un ingeniero mecánico consiste en el diseño y fabricación de maquinaria de la más variada clase, desde engranajes hasta aviones comerciales. Para diseñar esta maquinaria, el ingeniero mecánico debe modelar cada pieza y cada tornillo, para después, mediante tornos e impresoras 3D, llevarlos a la realidad.

Al elaborar las piezas, un ingeniero mecánico debe ser capaz de trazar figuras geométricas con precisión, y describir la posición relativa de las líneas de su diseño, pues un par de líneas paralelas pueden determinar el funcionamiento correcto de una gran máquina.

6 Probabilidad



CONTENIDOS:



http://goo.gl/NN4wzy

Web:

Aquí puedes reforzar varios temas sobre probabilidad: http://pendientedemigracion.ucm.es/info/genetica/Estadistica/estadistica_basica%201.htm.

Libro:

Varios ejemplos de la aplicabilidad de la probabilidad puedes encontrarlos en esta lectura muy interesante; entra en el siguiente link: http://www2.cab.cnea.gov.ar/divulgacion/probabilidades/m_probabilidad_f1.html

EN CONTEXTO:

El estudio de probabilidad permite predecir el resultado de experimentos aleatorios. El azar es parte muy importante en juegos de mesa y de casinos, por ejemplo, al lanzar los dados. Mediante estudios probabilísticos podemos calcular estrategias para obtener resultados deseados en un experimento aleatorio.

1. SUCESOS

Al repetir un mismo experimento en igualdad de condiciones, es posible obtener siempre el mismo resultado, o bien, que este sea imprevisible. En el primer caso, decimos que el experimento es determinista. En el segundo, decimos que es aleatorio.

El primer paso que hay que efectuar para estudiar un experimento aleatorio consiste en determinar el conjunto de resultados posibles. A cada uno de ellos lo llamamos *suceso elemental*.

Al conjunto de todos los resultados posibles lo denominamos *espacio muestral* y lo representamos por la letra E, o por la letra griega Ω.

Así, por ejemplo, en el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y observar su puntuación, el espacio muestral es:

$$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Consideremos ahora la situación A: obtener un número par. Podemos expresarla mediante el conjunto $A=\{2, 4, 6\}$, que es un subconjunto de Ω.

Llamamos suceso a cualquier subconjunto de Ω, es decir, a cualquier conjunto de resultados posibles. A los sucesos los representamos mediante letras mayúsculas.

Decimos que un suceso se cumple u ocurre al realizar un experimento aleatorio si el resultado obtenido forma parte de dicho suceso.

Ejemplo 1

Tenemos una urna con ocho bolas numeradas de la 1 a la 8. El experimento consiste en extraer una bola y observar su número.

a. Determinemos el espacio muestral del experimento y definamos por extensión los siguientes sucesos:

A: sacar un número menor que 5 B: sacar un número par

b. Al extraer una bola de la urna observamos el número 8. Indiquemos si se cumplen los sucesos A y B.

- Los resultados posibles son los números del 1 al 8. Entonces:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Por consiguiente:

$$A=\{1, 2, 3, 4\} \quad B=\{2, 4, 6, 8\}$$

Se cumplen los sucesos tales que ocho sea uno de sus elementos. Así pues, se cumple B, pero no A.

Actividades

1. Realizamos el experimento aleatorio en el que extraemos una carta de una baraja y miramos su palo.

a. **Determina** el espacio muestral.

b. **Define** los sucesos A: sacar diamantes y B: sacar corazones o tréboles.

c. Al extraer una carta, obtenemos un trébol. **Indica** si se cumplen los sucesos A y B.

1.1. Suceso seguro y suceso imposible

De entre los sucesos que podemos considerar al realizar un experimento aleatorio, hay algunos que poseen características especiales.

Vamos a estudiar estos sucesos tomando como ejemplo el experimento que consiste en lanzar un dado.

Tipo de suceso	Ejemplo
Llamamos suceso seguro al que contiene todos los resultados posibles del experimento. Este suceso se cumple siempre y coincide con el espacio muestral Ω.	El suceso A: Sacar un número menor o igual que seis está formado por todos los resultados posibles del experimento: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ Este suceso se verifica siempre.
Llamamos suceso imposible al subconjunto de Ω que no contiene ningún resultado posible del experimento. Este suceso no se cumple nunca y coincide con el conjunto vacío $\emptyset$.	El suceso B: Sacar un cero no está formado por ningún resultado posible del experimento: $B = \emptyset$ Este suceso no se cumple jamás.

Tabla 1.

1.2. Operaciones con sucesos

Hemos visto que los diferentes sucesos asociados con un experimento aleatorio son subconjuntos del espacio muestral Ω.

Por tanto, podemos realizar con ellos las operaciones habituales con conjuntos.

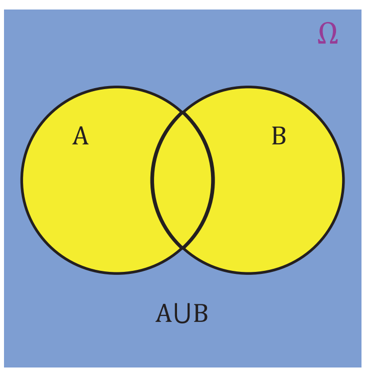
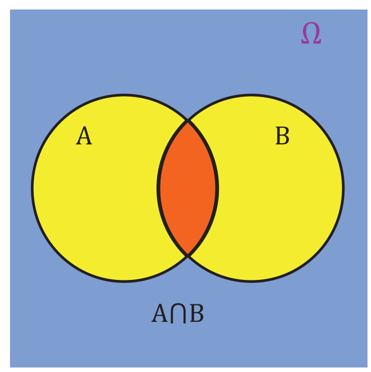
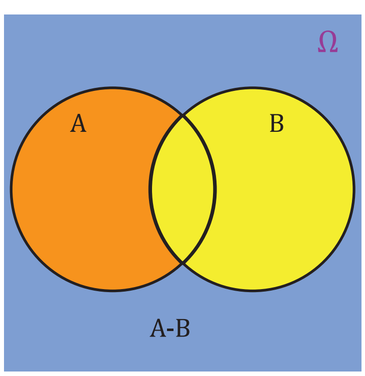
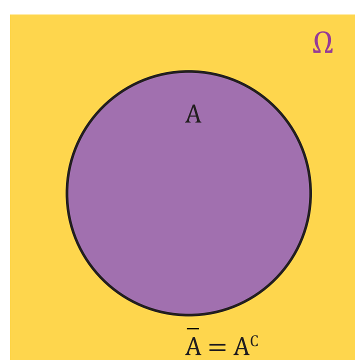
Unión		Intersección	
Llamamos unión de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A o en B. Lo representamos por $A \cup B$. El suceso $A \cup B$ se cumple si se cumplen A o B.		Llamamos intersección de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A y en B a la vez. Lo representamos por $A \cap B$. El suceso $A \cap B$ se cumple si se cumplen simultáneamente A y B.	
Diferencia		**Complemento**	
Llamamos diferencia entre el suceso A y el suceso B al suceso formado por todos los resultados que están en A, pero no en B. Lo representamos como A-B. El suceso A-B se cumple si se cumple A pero no se cumple B.		Llamamos complemento o contrario del suceso A, y se representa por $\bar{A}$ o A^c, al suceso formado por todos los resultados del experimento que no están en A, es decir, a la diferencia Ω - A. El suceso A^C se cumple si no se cumple A.	

Tabla 2.

Propiedades de las operaciones con sucesos

Podemos demostrar que las operaciones anteriores cumplen las propiedades de la siguiente tabla.

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Absorsión	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identidad	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$
Involución	$A \cup \underline{A} = \Omega$	$A \cap \underline{A} = \emptyset$
Complementación	$\bar{\bar{A}} = A$	
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \bar{B} \cap \bar{A}$ $(A \cup B)^C = B^C \cap A^C$	$\overline{A \cap B} = \bar{B} \cup \bar{A}$ $(A \cap B)^C = B^C \cup A^C$

Tabla 3.

Ejemplo 2

Tomemos una carta de una baraja inglesa y observemos su palo. Efectuemos las siguientes operaciones con los sucesos P: sacar corazones, Q: no sacar espadas y R: no sacar ni diamantes ni espadas.

a. $\bar{R}$ b. $R \cup Q$ c. $R \cap Q$ d. $Q - P$

Si designamos por D (diamantes), C (corazones), E (espadas) y T (trebol) los cuatro palos de la baraja, tenemos que:

$$\Omega = \{D, C, E, T\}$$

Así pues:

$$P = \{C\}\ ;\ Q = \{D, C, T\}\ ;\ R = \{C, T\}$$

De esta manera:

a. $\bar{R} = \Omega - R = \{D, C, E, T\} - \{C, T\} = \{D, E\}$

b. $R \cup Q = \{C, T\} \cup \{D, C, T\} = \{D, C, T\}$

c. $R \cap Q = \{C, T\} \cap \{D, C, T\} = \{C, T\}$

d. $Q - P = \{D, C, T\} - \{C\} = \{D, T\}$

Ejemplo 3

Lanzemos un dado y observemos su puntuación. Comprobemos que se cumplen las leyes de De Morgan con los sucesos A: sacar 2 o 3 y B: sacar más de 4.

Expresamos los sucesos A, $\bar{A}$, B y $\bar{B}$ por extensión:

$A = \{2, 3\}\ ;\ \bar{A} = \{1, 4, 5, 6\}$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6\}\ ;\ \bar{B} = \{1, 2, 3, 4\}$

Así pues, para la primera ley de De Morgan:

$\overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \Omega - (\{2, 3\} \cup \{5, 6\}) = \{1, 4\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4\}$

En efecto: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

De igual forma, para la segunda ley de De Morgan:

$\overline{A \cap B} = \Omega - (A \cap B) = \Omega - (\{2, 3\} \cap \{5, 6\}) = \Omega - \emptyset = \Omega$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 4, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

En efecto: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Llamamos conjunto potencia al conjunto formado por todos los sucesos asociados con un experimento. Lo representaremos por $P(\Omega)$.

Actividades

2. De una bolsa donde hay veinte bolas numeradas del 1 al 20, extraemos una. **Comprueba** que se cumplen las propiedades asociativa y distributiva con los sucesos A: obtener número par, B: obtener número primo y C: obtener un número tal que la suma de sus cifras sea 5.

1.3. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Dos o más sucesos son compatibles, si pueden cumplirse simultáneamente; es decir, si tienen al menos un resultado común. Caso contrario, son incompatibles o mutuamente exclusivos y su intersección es el conjunto vacío $\emptyset$.

Considera el experimento consistente en lanzar un dado. Los sucesos $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, y $C = \{4, 5\}$ cumplen lo siguiente:

A y B son compatibles, y B y C son incompatibles, $B \cap C = \emptyset$.

Sean ahora los sucesos $D = \{1, 2\}$, $E = \{4, 5\}$ y $F = \{6\}$. **Observa** en la figura 1 que todas las parejas posibles que se pueden formar entre estos sucesos (D y E, D y F, E y F) son incompatibles, ya que sus respectivas intersecciones son $\emptyset$.

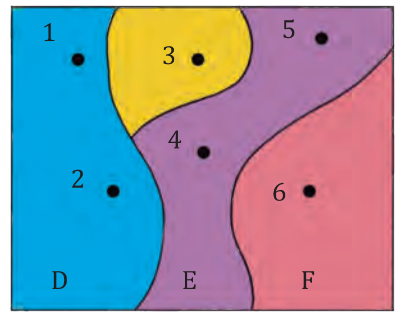


Fig. 1.

Decimos que tres o más sucesos son incompatibles dos a dos si es incompatible cualquier pareja que se pueda formar entre ellos.

1.4 Sistema completo de sucesos

Considera de nuevo el experimento que consiste en lanzar un dado. Los sucesos $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5\}$ e $I = \{6\}$ cumplen lo siguiente:

- Su unión es el espacio muestral: $G \cup H \cup I = \Omega$ S 1.
- Son incompatibles en pares: $G \cap H = \emptyset$, $G \cap I = \emptyset$, $H \cap I = \emptyset$ S 2.

Decimos que G, H e I forman un sistema completo de sucesos.

Si Ω es el espacio muestral de un experimento aleatorio, los sucesos $A_1,...,A_n$ forman un sistema completo de sucesos solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- $A_1 \cup ... \cup A_n = \Omega$.
- $A_1,...,A_n$ son incompatibles dos a dos.

Ejemplo 4

Extraemos una bola de una urna donde hay una bola blanca (B), una roja (R) y una negra (N). Averigüemos si son compatibles o incompatibles los sucesos $U = \{B, R\}$, $V = \{R, N\}$ y $W = \{B, N\}$.

- ¿Forman U, V y W un sistema completo de sucesos?

Para Tenemos que $U \cap V \cap W = \emptyset$. Por tanto, U, V y W son incompatibles.

- Para ver si U, V y W forman un sistema completo de sucesos debemos comprobar S1 y S2:

S1: $U \cup V \cup W = \{B, R\} \cup \{R, N\} \cup \{B, N\} = \{B, R, N\} = \Omega \Rightarrow$ Se cumple.

S2: $U \cap V = \{R\}$, $V \cap W = \{N\}$ y $U \cap W = \{B\} \Rightarrow$ No se cumple.

Vemos que U, V y W no son incompatibles dos a dos, por lo que no forman un sistema completo de sucesos.

Actividades

3. Dado el experimento que consiste en extraer una carta de una baraja de cartas y los sucesos A: obtener un rey, B: obtener corazones o espadas, C: obtener una letra y D: obtener el tres de trebol, **indica** si los siguientes sucesos son compatibles o incompatibles:

a. A y B b. A y C c. B y D d. A, C y D e. A, B y C f. A, B y D

2. PROBABILIDAD

Inicialmente, nos referimos a la probabilidad como una medida del grado de certeza sobre la ocurrencia de un suceso o no. Recordemos las definiciones experimental y axiomática de la probabilidad.

2.1. Definición experimental

Efectuamos varias series de N realizaciones de un experimento aleatorio:

- Al número de veces que se cumple un suceso A en cada una de ellas lo llamamos frecuencia absoluta de A y lo simbolizamos por n_A.
- Al cociente entre las frecuencias absolutas y el número de realizaciones, N, del experimento lo llamamos frecuencia relativa del suceso A y lo simbolizamos por f_A.

A medida que aumenta el número de realizaciones del experimento, las frecuencias relativas de un suceso tienden hacia cierto valor. Esta propiedad permite dar la siguiente definición experimental de la probabilidad de un suceso:

Dado cualquier suceso A asociado con un experimento aleatorio, llamamos probabilidad de A, $P(A)$, al número hacia el que tienden las frecuencias relativas de A al aumentar el número de realizaciones del experimento.

2.2. Definición axiomática

Aunque la definición experimental que acabamos de estudiar parece satisfacer la intuición, tiene ciertos inconvenientes:

- Sería necesario repetir infinitas veces el experimento para conocer el límite de las frecuencias relativas, lo que no es factible.
- Nada nos asegura que la regularidad de las frecuencias relativas sea cierta para cualquier número de repeticiones del experimento.

Para superar estos problemas, damos una definición axiomática de la probabilidad de un suceso, matemáticamente mucho más rigurosa.

Dado el espacio muestral Ω asociado con un experimento aleatorio, llamamos probabilidad a una función:

$$P: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow P(A)$$

Que asocia a cada suceso A un número real llamado probabilidad de A, $P(A)$, y que cumple los siguientes axiomas:

- La probabilidad de cualquier suceso A es positiva o cero: $P(A) \geq 0$
- La probabilidad del suceso seguro vale 1: $P(\Omega) = 1$
- La probabilidad de la unión de un conjunto (finito o infinito) de sucesos incompatibles dos a dos, $A_1,\ldots,A_i,\ldots$, es la suma de las probabilidades de los sucesos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

En matemáticas, un axioma es una afirmación que se acepta sin demostración.

2.3. Propiedades de la probabilidad

Las principales propiedades de la probabilidad son:

- Las probabilidades de los sucesos A y $\bar{A}$ suman 1:

$$P(A) + P(A^c)=1$$

- La probabilidad de un suceso A contenido en otro suceso B es menor o igual que la probabilidad de B:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

- La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles A y B es la suma de sus probabilidades menos la de su intersección:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Estas propiedades son fáciles de demostrar a partir de la definición axiomática de probabilidad. Aquí podemos ver, a modo de ejemplo, la demostración de la propiedad 2:

Ejemplo 5

Halla la probabilidad de los sucesos C^c, $C \cap C^c$ y B, sabiendo que:

$P(A)=\frac{3}{4}$ $\quad P(A \cap B)=\frac{1}{3}$ $\quad P(A \cup B)=\frac{2}{3}$ $\quad P(C)=\frac{3}{5}$

Como consecuencia de la propiedad P_1, tenemos que:

$$P(C) + P(C^c) = 1 \Rightarrow P(C^c) = 1 - P(C) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Puesto que $C \cap C^c = \emptyset$ y sabemos que $P(\emptyset) = 0$, entonces:

$$P(C \cap C^c) = P(\emptyset) = 0$$

De acuerdo con la propiedad P_3 de la probabilidad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Por consiguiente:

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Demostración de P2.

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Si $A \subset B$, de la figura 2 se deduce que:

$$B = A \cup (B - A)$$

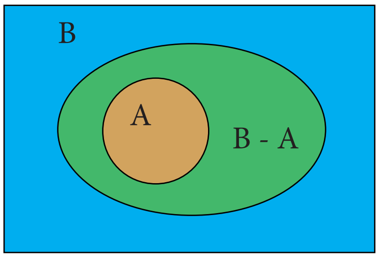


Fig. 2.

Luego:

$P(B) = P(A \cup (B - A))$ ①

Puesto que A y B - A son incompatibles, aplicando el axioma A3 tenemos:

$P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$ ②

Así, de ① y ② obtenemos que:

$P(B) = P(A) + P(B - A)$ ③

Finalmente, como por el axioma A1 se cumple que $P(B - A) \geq 0$, de ③ se deriva que:

$$P(B) \geq P(A)$$

Actividades

4. De una baraja se extrae una carta al azar y se obseva cuál es. **Utiliza** las relaciones de inclusión entre los siguientes sucesos para ordenarlos de menor a mayor probabilidad:

   a. sacar diamantes

   b. no sacar espadas

   c. sacar el rey de diamantes

   d. sacar diamantes o corazones

5. Se sabe que la probabilidad de que un estudiante haya aprobado Matemáticas es 0,45; la de que haya aprobado Lengua, 0,4; y la de que haya aprobado alguna de las dos materias, 0,7.

   Si elegimos un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado ambas materias?

3. PROBABILIDAD CONDICIONADA

3.1. Concepto

En ocasiones, disponer de información previa sobre un suceso hace que varíe su probabilidad. Veámoslo mediante un ejemplo.

Ejemplo 6

En un centro escolar de N estudiantes, n_o tienen computadora y n_m son chicas. Al elegir un estudiante al azar, estamos interesados en los sucesos A: escoger un estudiante que tenga computadora y B: escoger una chica.

Para calcular la probabilidad de estos dos sucesos, realizamos la división:

$$P(A) = \frac{n_o}{N} \qquad P(B) = \frac{n_m}{N}$$

Si n_{om} son los estudiantes que tienen computadora y son chicas, la probabilidad del suceso $A \cap B$: escoger una chica que tenga computadora, será:

$$P(A \cap B) = \frac{n_{om}}{N}$$

Supongamos ahora que queremos calcular la probabilidad de que un estudiante tenga computadora eligiendo solo entre la población femenina. Esto equivale a calcular la probabilidad de A sabiendo de antemano que el estudiante elegido es chica, es decir, que ha ocurrido B.

A esta probabilidad la representamos por $P(A|B)$ y decimos que es la probabilidad de A dado B, o la probabilidad de A condicionada a B. Así:

$$P(A|B) = \frac{n_{om}}{n_m}$$

Y al dividir numerador por denominador por N tenemos que:

$$P(A|B) = \frac{n_{om}}{n_m} = \frac{\frac{n_{om}}{N}}{\frac{n_m}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si enunciamos esta conclusión de forma general, obtenemos:

Dados dos sucesos A y B, tales que $P(B) \neq 0$, llamamos probabilidad de A dado B, $P(A|B)$, al cociente:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De la probabilidad condicionada se deriva una expresión que resulta muy útil en el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

A esta expresión la conocemos como principio de la probabilidad compuesta o regla del producto.

3.2. Propiedades de la probabilidad condicionada

Las principales propiedades de la probabilidad condicionada son:

- Si un suceso B está contenido en un suceso C, entonces la probabilidad de B dado A es menor o igual que la probabilidad de C dado A.

$$B \subset C \Rightarrow P(B|A) \leq P(C|A)$$

- Si un suceso B está contenido en otro suceso A, entonces la probabilidad del suceso B dado A es el cociente entre la probabilidad del suceso B y la probabilidad del suceso A.

$$B \subset A \Rightarrow P(B|A)= \frac{P\ (A\ )}{P\ (B\ )}$$

- Si un suceso A está contenido en otro suceso B, entonces la probabilidad del suceso B dado A es igual a uno.

$$A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$$

Estas propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades de la probabilidad y de la definición de probabilidad condicionada.

3.3. Sucesos dependientes y sucesos independientes

Al lanzar dos veces un dado, el hecho de que se verifique o no el suceso B: número par en el primer lanzamiento, no influye en el suceso A: número impar en el segundo lanzamiento, ni viceversa.

En este caso, la probabilidad de que ocurra un suceso no está condicionada a que ocurra el otro. Por tanto:

$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A)=P(B)$$

A partir del principio de la probabilidad compuesta, tenemos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Diremos entonces que ambos sucesos son independientes.

Dados dos sucesos A y B, asociados con un mismo experimento aleatorio, diremos que A y B son independientes si se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Caso contrario, decimos que A y B son dependientes.

Actividades

6. **Demuestra** que si $A \cap B = \emptyset$, entonces se cumple que $P(B|A)= 0$.

7. Extraemos dos bolas de una urna en la que hay cinco bolas blancas y tres negras. **Calcula** la probabilidad de los sucesos A: las dos bolas son negras y B: la primera bola es blanca y la otra es negra, en los casos siguientes:

   a. Sin reemplazo de la primera bola extraída

   b. Con reemplazo de la primera bola extraída

3.4. Teorema de la probabilidad total

A partir del concepto de *probabilidad condicionada*, es posible enunciar una regla práctica para calcular la probabilidad de ciertos sucesos. Considera para ello el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7

Una fábrica de tornillos dispone de dos máquinas que elaboran el 75% y el 25% de la producción total.

El porcentaje de tornillos defectuosos que produce cada máquina es, también respectivamente, del 4% y del 2%. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un tornillo al azar, este sea defectuoso?

Consideramos los sucesos D: tornillo defectuoso, M_1: tornillo elaborado por la máquina 1 y M_2: tornillo elaborado por la máquina 2. Observamos el diagrama en árbol de la figura 3.

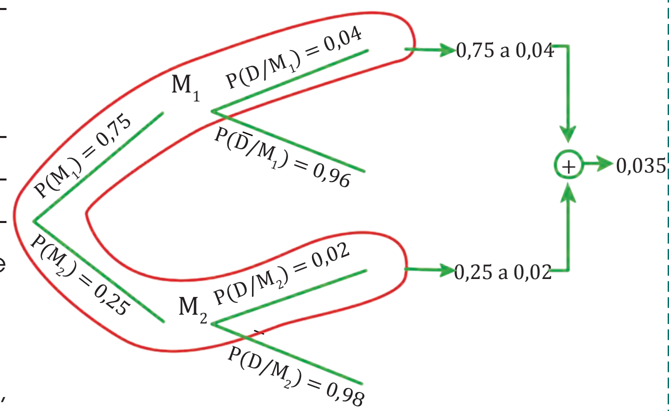


Fig. 3.

Según el diagrama, podemos calcular la probabilidad de D a partir de la suma de las probabilidades de cada rama:

$$P(D) = 0.75 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.02 = 0.035$$

Observamos que los términos de esta suma son:

$$P(M_1) = 0{,}75 \quad P(M_2) = 0{,}25 \quad P(D \mid M_1) = 0{,}04 \quad P(D \mid M_2) = 0{,}02$$

Así pues, podemos expresar $P(D)$ como:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D \mid M_1) + P(M_2) \cdot P(D \mid M_2)$$

Si generalizamos este resultado, llegamos al enunciado del teorema de la probabilidad total:
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera, todos asociados con un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)$$

Actividades

8. Disponemos de cuatro urnas con bolas, de tal manera que:
   - En la primera urna hay cuatro bolas rojas y cinco blancas.
   - En la segunda urna hay tres bolas rojas y ocho blancas.
   - En la tercera urna hay cinco bolas rojas y dos blancas.
   - En la cuarta urna hay dos bolas rojas.

   Si elegimos una urna al azar y extraemos de ella una bola, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea roja?

3.5. Teorema de Bayes

Vamos a estudiar el ejemplo del apartado anterior desde otro punto de vista. Si sabemos que un tornillo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por cierta máquina?

Calculemos la probabilidad de que el tornillo haya sido fabricado por la máquina 1, sabiendo que ha resultado defectuoso, es decir, $P(M_1 | D)$.

Según la definición de *probabilidad condicionada*, tenemos:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$$

Por otro lado, del diagrama de la figura podemos calcular la probabilidad de $P(M_1 \cap D)$, que corresponde a la de la rama señalada:

$$P(M_1 \cap D) = P(M_1) \cdot P(D | M_1)$$

Si tenemos en cuenta además el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D | M_1) + P(M_2) \cdot P(D | M_2)$$

llegamos finalmente a:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1) \cdot P(D | M_1)}{P(M_1) \cdot P(D | M_1) + P(M_2) \cdot P(D | M_1)}$$

Con los datos del ejemplo:

$$P(M_1|D) = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}04}{0{,}75 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}02} = 0{,}857$$

Al enunciar de forma general el resultado anterior, llegamos al llamado teorema de Bayes:

Sea $A_1,...,A_i,...,A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera, todos ellos asociados con un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1),...,P(A_i),...,P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{P(A_1) \cdot P(B | A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B | A_n)}$$

Actividades

9. En un congreso se reúnen 250 médicos del Benelux, de los cuales 115 son holandeses; 65, belgas, y 70, luxemburgueses. De ellos, el 75% de los holandeses, el 60% de los belgas y el 65% de los luxemburgueses están a favor de la utilización de determinada vacuna. Seleccionamos al azar uno de los médicos y resulta estar a favor del uso de la vacuna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Luxemburgo?

4. VARIABLES ALEATORIAS

4.1. Concepto

Considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos monedas, cada una con una cara (c) y una cruz (+). El espacio muestral de este experimento es:

$$\Omega = \{(c,c),(c,+),(+,c),(+,+)\}$$

Podemos asignar un valor numérico a cada uno de los resultados posibles, por ejemplo, el número de caras obtenidas. Esta asignación define una función del espacio muestral en el conjunto de los números reales.

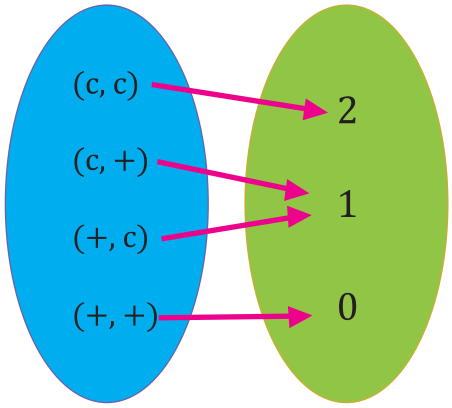


Fig. 3.

A las funciones definidas de esta forma las denominamos variables aleatorias, y las representamos mediante una letra mayúscula, por ejemplo X.

Una variable aleatoria, X, es cualquier función que asigne un número real a cada resultado posible de un experimento aleatorio:

$$X: \Omega \rightarrow R$$

$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

Observa que pueden asociarse diferentes variables aleatorias a un mismo experimento. Así, por ejemplo, al lanzar dos monedas podemos considerar, además, la variable que hace corresponder a cada resultado el número de cruces obtenidas, la que asigna a cada resultado el valor 1 si contiene alguna cruz o el valor -1 si no contiene ninguna.

Y TAMBIÉN:

El conjunto de valores que puede tomar una variable aleatoria discreta puede ser infinito.

Así, por ejemplo, considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda hasta conseguir una cara. El espacio muestral consta de infinitos resultados:

$$\Omega = \{c, +c, ++c, +++c, ...\}$$

De esta forma, la variable aleatoria que asigna a cada resultado el número de tiradas puede tomar cualquier valor dentro del conjunto de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

4.2. Tipos de variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función, por lo que tiene un dominio y un recorrido. El dominio es el espacio muestral Ω asociado con un experimento aleatorio y el recorrido es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Las variables aleatorias que hemos considerado hasta ahora solo toman valores dentro de un conjunto finito de elementos: $\{0, 1, 2\}$, $\{-1, 1\}$,...

Diremos que se trata de variables aleatorias discretas.

Considera, ahora, el experimento aleatorio que consiste en escoger al azar un estudiante de la clase y la variable aleatoria que asigna a cada uno de ellos su altura. Esta variable aleatoria puede tomar, en principio, cualquier valor dentro de un intervalo del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Diremos que se trata de una variable aleatoria continua.

Una variable aleatoria es continua si su recorrido es uno o varios intervalos de $\mathbb{R}$. Caso contrario, diremos que es discreta.

5. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Considera de nuevo la variable aleatoria X, que asigna a cada resultado del lanzamiento de dos monedas el número de caras obtenidas. ¿Cuál es la probabilidad de que esta variable tome el valor 0?

Esta variable toma el valor 0 cuando en el lanzamiento de las dos monedas obtenemos dos cruces. Por lo tanto, la probabilidad de que X tome el valor 0 es la probabilidad de conseguir dos cruces en el lanzamiento de dos monedas.

$$P(X = 0) = P(\{(+, +)\}) = \frac{1}{4}$$

De la misma manera, tenemos:

$$P(X = 1) = P(\{(c, +), (+, c)\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(\{(c, c)\}) = \frac{1}{4}$$

Así pues, podemos asignar a cada valor x_i del recorrido de la variable aleatoria X la probabilidad de que X tome dicho valor, tal y como observamos en la tabla de la derecha. A esta asignación de probabilidades la llamamos distribución de probabilidad.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Tabla 4.

5.1. Función de probabilidad

Considera, ahora, la función f que asigna a cada número real x la probabilidad de que la variable aleatoria X tome ese valor. Esta función cumple lo siguiente:

- Si x no es un valor del recorrido de la variable, $f(x) = P(X = x) = 0$.
- Si x es un valor del recorrido de la variable, $f(x) = P(X = x)$ vendrá dada por la distribución de probabilidad de X.

Así, en el ejemplo que analizamos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A esta función la llamamos función de probabilidad de X y la podemos expresar también en forma de gráfica o tabla de valores, tal y como vemos a la derecha. Observa que, para los valores de x que no aparecen en la tabla, se cumple que $f(x) = 0$.

x_i	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Tabla 5.

En general:

Llamamos función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X a la función que asigna a cada número real x la probabilidad de que X tome el valor x:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = P(X = x)$$

6. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Considera el experimento que consiste en escoger al azar una persona, y la variable aleatoria que asigna a cada una su peso. Esta variable puede tomar, en principio, cualquier valor dentro de un intervalo de $\mathbb{R}$, por lo que hemos de distribuir la probabilidad entre infinitos valores.

En consecuencia, la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor determinado es, en general, cero. Debemos entonces buscar una alternativa para describir las probabilidades asociadas con este tipo de variables.

6.1. Función de densidad

Efectuamos tres estudios estadísticos sobre los ingresos mensuales de las familias ecuatorianas y obtenemos los siguientes histogramas de frecuencias relativas.

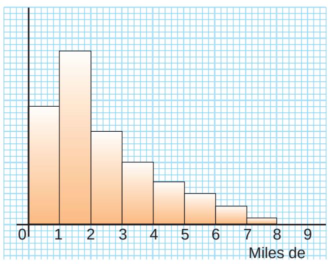
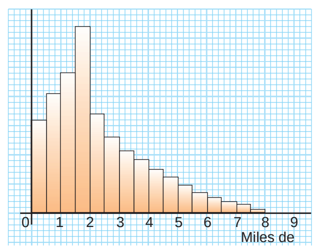
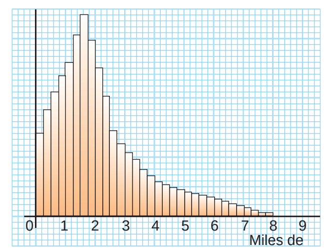
Estudio A: Muestra de 100 familias	**Estudio B**: Muestra de 1000 familias	**Estudio C**: Muestra de 10 000 familias
		

Tabla 6.

Observa que cada vez se han considerado muestras con un mayor número de familias y los ingresos se han agrupado en intervalos cada vez más pequeños.

Así, en el caso de que la muestra fuera infinitamente grande y los intervalos, infinitamente estrechos, el perfil del histograma se convertiría en la gráfica de la función f de la figura.

Nos preguntamos ahora cuál es la probabilidad de que una familia tenga unos ingresos de entre 1000 y 2000 dólares. Según la definición experimental de probabilidad, la probabilidad de un suceso es el número al que tienden sus frecuencias relativas cuando aumenta el número de realizaciones del experimento.

Por tanto, para hallar la probabilidad anterior, observamos el número hacia el que tiende la frecuencia relativa del intervalo $[1, 2]$ conforme tomamos muestras cada vez mayores.

Este número se corresponde con el área bajo la gráfica representada en la figura, que, como sabemos, viene dada por la integral definida de f entre 1 y 2.

Vemos, entonces, que f nos permite asociar probabilidades a la variable aleatoria continua X.

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx$$

Esta función recibe el nombre de función de densidad. En general, llamamos función de densidad de una variable aleatoria continua X a una función f que cumple las siguientes condiciones:

$$f(x) \geq 0 \; \forall \, x \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

La función de densidad asigna a cada intervalo real $[a, b]$ la probabilidad de que la variable aleatoria X esté comprendida en este intervalo mediante la expresión:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

7. PARÁMETROS DESCRIPTIVOS

Como ya sabemos, para entender los resultados de una distribución estadística, es común utilizar medidas descriptivas para resumir las características principales de los datos.

Dado que podemos considerar una distribución de probabilidad como el caso límite de una distribución estadística, definimos la media aritmética, la varianza y la desviación estándar, para variables aleatorias, y sustituimos las frecuencias relativas por probabilidades.

7.1. Esperanza

En distribuciones estadísticas, utilizamos el valor esperado como una medida del centro de los datos.

Recuerda que, para una distribución estadística con $x_1,\ldots, x_i,\ldots$ datos, cuya frecuencia absoluta respectiva es $n_1,\ldots,n_i,\ldots$, la media aritmética está dada por la ecuación:

$$x = \frac{\sum_i x_i \cdot n_i}{N} ,$$

pero recuerda que $\frac{n_i}{N}$ es el valor de la probabilidad de la variable aleatoria $P(X = x_i) = f(x_i)$. Así pues, podemos considerar una distribución de probabilidad como el caso límite de una distribución estadística y definir la media aritmética para variables aleatorias, sustituyendo las frecuencias relativas por probabilidades, por lo que podemos reescribir la expresión del valor medio como:

$$\mu = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$$

En una distribución de probabilidad, a este valor lo conocemos como la esperanza, $E(X)$, de la variable aleatoria X.

Juegos de azar

A un juego de azar podemos asociarle siempre una variable aleatoria X, cuyos valores son las ganancias correspondientes a los posibles resultados.

La esperanza de X representa el beneficio medio en cada jugada cuando consideramos un número muy elevado de ellas.

Y TAMBIÉN:

Propiedades de la esperanza:
Para todo número $k \in \mathbb{R}$, y para dos variables aleatorias X y Y:
$E(k) = k$
$E(X + k) = E(X) + k$
$E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

- Si $\mu > 0$, decimos que el juego favorece al jugador.
- Si $\mu < 0$, decimos que el juego perjudica al jugador.
- Si $\mu = 0$, decimos que el juego es equitativo.

Ejemplo 8

Un juego consiste en extraer una bola de una urna que contiene ocho bolas blancas y dos bolas negras. Cobramos $ 0,5 si la bola extraída es blanca, y pagamos $ 2,25 si es negra. ¿Cuánto será la ganancia o pérdida media por cada juego?

Consideramos la variable aleatoria X que asigna a cada resultado la ganancia correspondiente. Puesto que: P (blanca) = 0,8 y P (negra) = 0,2, la función de probabilidad será:

x	-2,25	+ 0,5
f (x)	0,2	0,8

En este caso:

$\mu = -2,25 \cdot 0.2 + 0,5 \cdot 0,8 = -0,05$

Por lo tanto, cabe esperar una pérdida media de $ 0,05 por partida.

7.2. Varianza

Recuerda ahora que, para una distribución estadística, la varianza nos permite medir la dispersión de los datos. En otras palabras, por medio de la varianza, podemos medir qué tan lejos está cada dato del valor medio. **Observa** que, para una distribución de probabilidad, podemos escribir:

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2$$

Este valor nos dará como resultado el promedio de la distancia entre el valor x_i y la media μ, elevada al cuadrado. Por tanto, definimos:

La varianza es un valor de dispersión de los datos, que es mayor mientras haya más variabilidad, y menor si los datos son más homogéneos. La expresamos como:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$$

Propiedades:

$\sigma^2(x + k) = \sigma^2(x)$

$\sigma^2(kx) = k^2 \sigma^2(x)$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ejemplo 9

Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria X cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [1, 4] \\ 0 & \text{si } x \notin [1, 4] \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que empleamos para calcular la esperanza:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0\,dx + \int_{1}^{4} x \cdot \frac{1}{3}\,dx + \int_{1}^{+\infty} x \cdot 0\,dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} x\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)_1^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 2{,}5$$

De la misma manera, calculamos la varianza:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \int_{-\infty}^{1} x^2 \cdot 0\,dx + \int_{1}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{3}dx + \int_{4}^{+\infty} x^2 \cdot 0\,dx - (2{,}5)^2 = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} x^2\,dx - (2{,}5)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)_1^4 - (2{,}5)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) - (2{,}5)^2 = 0{,}75$$

Finalmente, hallamos la desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$

Actividades

10. **Calcula** la esperanza, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria que indica la suma de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados.

11. Un juego consiste en lanzar dos dados, de forma que se cobran tantos dólares como indique la suma de puntos si esta es un número primo, o bien, se pagan $ 5 en caso contrario.
    a. **Obtén** la función de probabilidad f de la variable aleatoria X que indica la ganancia correspondiente a cada resultado.
    b. **Determina** si el juego es equitativo.

12. Partiendo de la definición de varianza, $\sigma^2 = E(X - \mu)^2$, **deduce** que la misma puede también ser expresada como $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$, o lo que es lo mismo, $\sigma^2 = \sum_i (x_i^2 \cdot f(x_i)) - \mu^2$.

8. DISTRIBUCIONES DISCRETAS

8.1. Distribución de Bernoulli

Considera el experimento que consiste en lanzar una moneda y observar si cae en cara o cruz. Este experimento se realiza una sola vez y tiene dos resultados posibles. A esta clase de experimentos la conocemos como ensayo de Bernoulli.

Imagina ahora que queremos obtener cara al lanzar la moneda. Podemos denominar a este suceso como *éxito*, y al resultado cruz como *fracaso*. Entonces, la variable aleatoria asociada con este experimento puede escribirse como:

$$X(x) = \begin{cases} 1 \text{ si cae cara} \\ 0 \text{ si cae cruz} \end{cases}$$

y siendo el valor de probabilidad de éxito p, y el valor de probabilidad de fracaso $q = 1 - p$, la distribución de probabilidad del ensayo de Bernoulli resulta en:

x	1	0
$f(x)$	p	q

Tabla 7.

Observa que esto es lo mismo que decir

$$f(x) = p^x \cdot q^{1-x}, \ x = 0,1$$

Decimos que la variable aleatoria sigue una distribución de Bernoulli.

8.2. Distribución binomial

Consideremos ahora un experimento compuesto, formado por n realizaciones consecutivas de un ensayo de Bernoulli, de forma que:

- En cada realización del experimento simple solo nos interesa estudiar si se cumple o no determinado suceso A.
- El resultado obtenido en cada realización del experimento simple es independiente de los resultados obtenidos en las realizaciones anteriores.
- La probabilidad del suceso A es la misma en todas las realizaciones del experimento simple.

Si representamos la probabilidad de A por p, decimos que la variable aleatoria X, que cuenta el número de veces que se ha verificado el suceso A en las n realizaciones del experimento simple, sigue una distribución binomial de parámetros n y p. Esto lo simbolizaremos escribiendo $X \sim B(n,p)$.

Observa que X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $0,1,2,...,n$.

Vamos ahora a obtener su función de probabilidad. Para ello, considera el siguiente ejemplo.

Revisamos 500 tornillos fabricados por una máquina que elabora un 10% de piezas defectuosas y observamos si presentan o no alguna anomalía. Queremos hallar la probabilidad de que entre 500 tornillos examinados, haya exactamente 2 tornillos defectuosos.

Estamos investigando el suceso A: tornillo defectuoso. Este suceso puede expresarse como:

$$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n$$

Por la independencia de las realizaciones:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = 0.1^2 \cdot 0.9^{498}$$

Si razonamos de igual manera, obtenemos que la probabilidad de que los tornillos defectuosos sean el primero y el tercero, el quinto y el octavo, etc., es también $0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{498}$.

Así pues, la probabilidad de que haya 2 tornillos defectuosos entre los 500 será $0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{498}$ multiplicado por el número de posibles maneras de situar los dos tornillos defectuosos entre los 500, que serán las combinaciones de 500 elementos tomados de 2 en 2, $C_{500,2} = \binom{500}{2}$

En forma general $C_{n,x} = \binom{n}{x} = C_x^n$

Por tanto, si $X \sim B\,(500, 0.1)$ es la variable aleatoria de nuestro ejemplo:

$$P\,(X = 2) = \binom{500}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^{498}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, podríamos comprobar que la probabilidad de obtener k tornillos defectuosos es: $P\,(X = k) = \binom{500}{k} \cdot 0.1^k \cdot 0.9^{500-k}$ para $k = 0, 1, 2, \dots, 500$

En general, si $X \sim B(n, p)$ es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial y denotamos por q la diferencia $1 - p$:

$$f\,(x) = \left\{ \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \right.$$

Para hallar los parámetros de $X \sim B(n, p)$, basta con particularizar en el caso que nos ocupa las expresiones generales que estudiamos en la página 190.

Así, podemos demostrar que los parámetros de $X \sim B(n, p)$ son los de la tabla.

Esperanza	Varianza	Desviación típica
$\mu = n \cdot p$	$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$	$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Tabla 8.

Actividades

13. Un examen tipo *test* consta de diez preguntas. Cada pregunta tiene cuatro posibles respuestas, de las que solo una es correcta. Un estudiante que no ha estudiado responde al azar a las preguntas del examen.

a. **Comprueba** que la variable aleatoria que cuenta el número de aciertos sigue una distribución binomial, $X \sim B(n, p)$, y **halla** su función de probabilidad.

b. **Calcula** la probabilidad de que el estudiante apruebe el examen, es decir, que acierte al menos seis preguntas.

c. **Calcula** la esperanza, la varianza y la desviación típica de X.

Esperanza	Varianza	Desviación estándar

8.3. Distribución de Poisson

Consideremos ahora un experimento en el que queremos saber la probabilidad de que un suceso ocurra en un período o un espacio específico dado. Por ejemplo: ¿Cuántos autos pasarán por un control de velocidad en una hora? ¿Qué tal en dos?

En este caso, el resultado del experimento no depende de las veces que realicemos el experimento, pero sí del intervalo de tiempo proporcionado. Además asumimos que la probabilidad de que un auto pase aumenta si el tiempo aumenta. Llamemos ahora μ al valor promedio, o esperanza, de autos que pasan por el control en un minuto cualquiera. Entonces resulta evidente que el promedio de autos que pasan por el control en un tiempo t mayor que 0 será $\mu \cdot t$. Representamos este número como λ.

Si la variable aleatoria X cuenta la probabilidad de que un suceso ocurra en un intervalo dado, y la probabilidad del suceso es proporcional a la longitud del intervalo, decimos que X sigue una distribución de Poisson, y lo expresamos como $X \sim P(\lambda)$.

La función de distribución de esta variable aleatoria está dada por

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$$

Puede demostrarse que los parámetros de $X \sim P(\lambda)$ son los de la tabla.

Esperanza	Varianza	Desviación estándar
λ	λ	$\sqrt{\lambda}$

Tabla 9.

Ejemplo 10

Sabemos que a una ciudad portuaria llegan en promedio 10 camiones tanqueros por día. El puerto solo puede recibir a 15 camiones como máximo en un día.

–¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado lleguen más de 15 camiones?

–¿Cuál es la probabilidad de que en dos días lleguen exactamente 15 camiones?

a. Tenemos que el promedio de tanqueros por día es $\mu = 10$, y necesitamos saber la probabilidad de más de 15 ocurrencias en el mismo período. Esto quiere decir que la variable aleatoria de camiones que llegan sigue una distribución de Poisson, $X \sim P(10)$. Por tanto:

$$f(x) = \frac{e^{-10} (10)^x}{x!}$$

Ahora, queremos saber la probabilidad de que lleguen más de 15 camiones en el día. Evidentemente, no podemos sumar $P(16) + P(17) + P(18) + \cdots$, pero recuerda que la probabilidad del espacio muestral completo es 1, así que podemos calcular

$$P(x > 15) = 1 - P(x \leq 15) =$$
$$= 1 - [P(x = 0) + P(x = 1) + \cdots + P(x = 15)]$$

Al realizar esta operación, obtenemos que:

$$P(x > 15) = 0.00487$$

b. Ahora, debemos calcular la probabilidad de un suceso en un período de dos días, por lo tanto $\lambda = \mu \cdot t = 20$

Utilizando la fórmula de la distribución de Poisson:

$$f(x) = \frac{e^{-20} (20)^x}{x!}$$

Por lo tanto:

$$P(x = 15) = \frac{e^{-20} (20)^{15}}{15!} = 0.05165$$

Esperanza	Varianza	Desviación estándar

9. VARIABLE ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

En ocasiones interesa estudiar conjuntamente dos características de una misma población. Como ejemplo, fíjate en los datos que se recogen en la tabla 1. Corresponden al peso (X) y a la *estatura* (Y) de cinco jóvenes.

Anotamos los valores medidos en cada individuo en forma de par ordenado:

(76,181) (74,173) (79,177) (82,184) (78,183)

Cada uno de estos pares ordenados es un dato que procede de la observación conjunta de dos variables estadísticas unidimensionales.

Se llama variable estadística bidimensional a la que se obtiene al considerar conjuntamente dos variables estadísticas unidimensionales X e Y, relativas a una misma población. Se representa por el par (X,Y). El conjunto de todos los datos procedentes de la observación de una variable estadística bidimensional se denomina distribución bidimensional.

(5, 4), (4, 2), (6, 3), (4, 4), (3, 2),
(6, 4), (3, 1), (4, 2), (4, 2), (6, 4),
(4, 2), (5, 3), (3, 1), (2, 2), (4, 3),
(3, 1), (4, 2), (5, 3), (5, 3), (4, 2),
(3, 3), (1, 1), (4, 2), (5, 3), (3, 2),
(5, 3), (6, 4), (4, 2), (5, 3), (2, 1),
(3, 2), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (4, 2),
(3, 3), (3, 1), (2, 2), (6, 4), (5, 3),

Tabla 10.

9.1. Organización de datos

Una vez recogidos los datos correspondientes a la variable estadística bidimensional que se estudia, hay que organizarlos. Los dos sistemas más utilizados para organizar datos son las tablas de doble entrada y los diagramas de dispersión.

Tablas de doble entrada

En estas tablas se agrupan los datos de una distribución bidimensional en filas y columnas.

Veamos el procedimiento para construirlas. Considera los datos que se indican en el cuadro 10. Se han obtenido al estudiar las variables X = número de goles marcados e Y= número de goles recibidos, en 40 partidos jugados por el equipo campeón de la liga de fútbol sala.

y \ x	1	2	3	4	5	6
1	1	1	4	0	0	0
2	0	2	3	10	0	0
3	0	0	2	1	8	1
4	0	0	0	1	1	5

Tabla 11.

Elaboramos la tabla 11 de doble entrada siguiendo estos pasos:

- Construimos una tabla con tantas columnas como valores tome X y con tantas filas como valores tome Y. En este caso la tabla constará de 6 columnas y 4 filas.
- Contamos el número de veces que se repite cada par de valores en la distribución y lo anotamos en la casilla correspondiente. Así, por ejemplo, observa que el par (5, 4) aparece una sola vez; el (4, 2), diez veces; y el (6, 1), ninguna.

En el caso de los datos agrupados, debemos primero agrupar los datos de la distribución en intervalos de clase, dividiendo los datos en intervalos de igual longitud desde el mínimo valor hasta el máximo.

y \ x	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)
[0,1)	1	1	0	0	0
[1,2)	2	7	4	2	0
[2,3)	1	3	6	3	0
[3,4)	0	2	3	1	1
[4,5)	0	0	2	1	0

Tabla 12.

A modo de ejemplo, la tabla 12 recoge los datos obtenidos al observar en 40 estudiantes las variables X = horas diarias de estudio y Y = horas diarias de deporte.

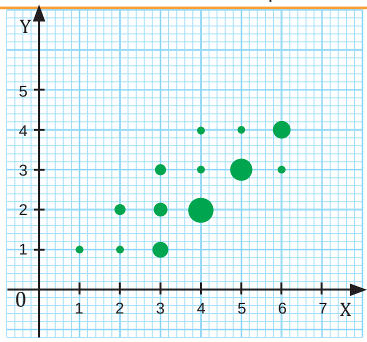
Diagrama de dispersión

La información contenida en una tabla de doble entrada es más fácil de interpretar si podemos observarla. El diagrama de dispersión o nube de puntos nos permite hacerlo en el plano.

Diagrama de dispersión o nube de puntos

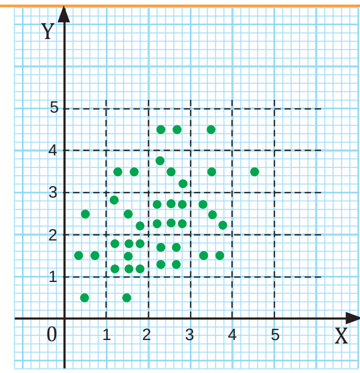
Los datos de una distribución bidimensional pueden representarse en unos ejes cartesianos en el plano.

En el caso de datos no agrupados, suelen dibujarse puntos de área proporcional a la frecuencia absoluta de cada par de valores que puede tomar la variable bidimensional (X, Y).



La figura refleja el diagrama de dispersión o nube de puntos correspondiente a los datos de la tabla 11.

En el caso de datos agrupados, se representan en cada casilla, determinada por un par de intervalos de clase, uno de X y otro de Y, tantos puntos como indique la frecuencia absoluta de dicho par de intervalos.



La figura muestra el diagrama de dispersión o nube de puntos correspondiente a los datos de la tabla 12.

Tabla 13.

9.2. Análisis de datos

La etapa final de un estudio estadístico es el análisis de los datos con el fin de extraer conclusiones que puedan ser de interés.

En especial, puede interesarnos estudiar si las dos variables unidimensionales que forman una variable bidimensional presentan algún tipo de relación entre ellas y cuáles son las características de esta relación.

Relación entre variables

En una muestra de familias formadas por padre, madre y dos hijos, hemos estudiado las variables:

W = ingresos familiares anuales ($)

X = estatura del padre (cm)

Y = gasto anual en energía eléctrica ($)

Z = consumo anual de energía eléctrica (kW/h)

Los valores de Y pueden determinarse exactamente a partir de los valores de Z si conocemos las tarifas de la compañía eléctrica.

> Entre dos variables estadísticas, existe dependencia funcional si están relacionadas de forma que sea posible determinar con exactitud los valores que toma una de ellas a partir de los que toma la otra.

Consideremos, ahora, las variables W y Z. Los valores de Z no pueden calcularse exactamente solo conociendo los de W.

Sin embargo, podemos suponer que consumirán menos energía eléctrica las familias con ingresos más modestos y, por el contrario, que consumirán más las familias con mayores recursos.

Entre dos variables estadísticas existe dependencia estadística o correlación cuando los valores que toma una de ellas están relacionados con los valores que toma la otra, pero no de manera exacta.

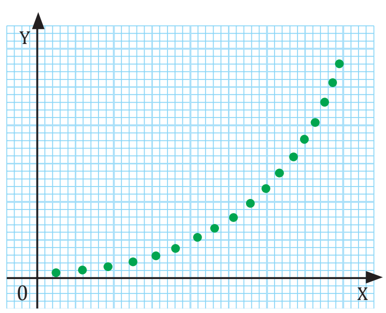
Finalmente, parece razonable pensar que no existe ninguna relación entre los valores de W y los de X.

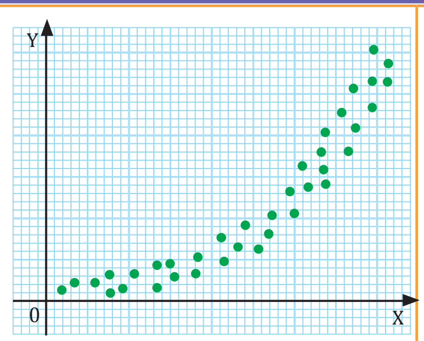
Dos variables estadísticas son independientes si no puede establecerse ninguna relación entre los valores que toma una de ellas y los que toma la otra.

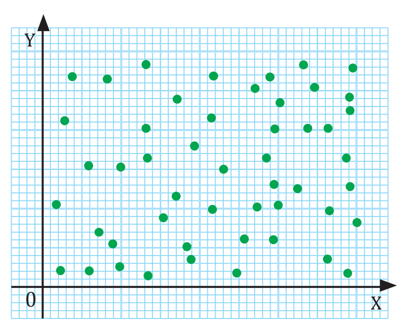
9.3. Interpretación gráfica de la relación entre variables

Hemos visto que al estudiar la relación entre dos variables pueden darse tres casos: independencia, dependencia funcional y una situación intermedia a la que llamamos dependencia estadística o correlación.

La relación existente entre dos variables queda reflejada en los diagramas de dispersión o nubes de puntos.



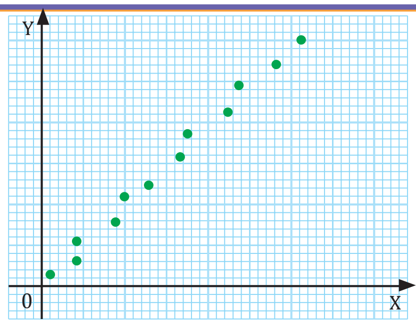




Los puntos de la nube se sitúan sobre una curva cuya expresió matemática podríamos determinar. Este caso corresponde al de una dependencia funcional entre las variables X e Y.	Los puntos de la nube se agrupan en torno a una posible curva, no muy definida, pero reconocible. Este caso corresponde al de una dependencia estadística o correlación entre las variables X e Y.	Los puntos de la nube no se agrupan en torno a ninguna curva, están completamente en desorden. Este caso corresponde al de independencia entre las variables X e Y.

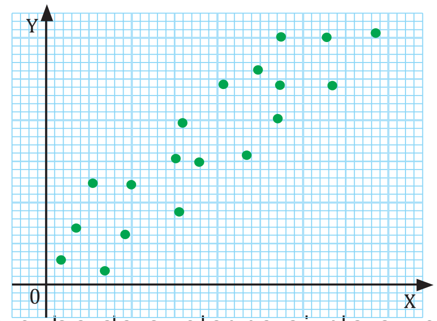
Tabla 14.

Entre los casos extremos de dependencia funcional e independencia, hay una amplia gama de situaciones en que se da dependencia estadística o correlación. **Observa** los siguientes diagramas de dispersión:



La nube de puntos se ajusta bastante bien a una curva reconocible.

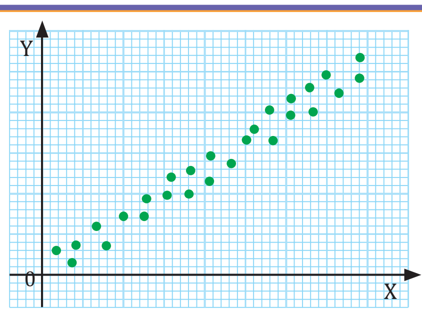
En este caso existe correlación fuerte entre las variables X e Y.



La nube de puntos se ajusta a una curva, aunque muy ligeramente.

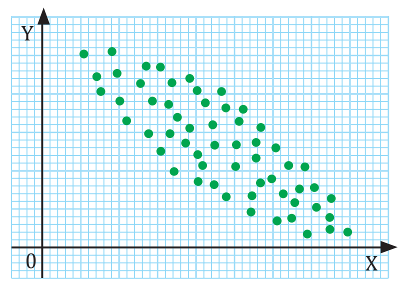
En este caso existe correlación débil entre las variables X e Y.

Tabla 15.



Al aumentar los valores de X, también aumentan los valores de Y.

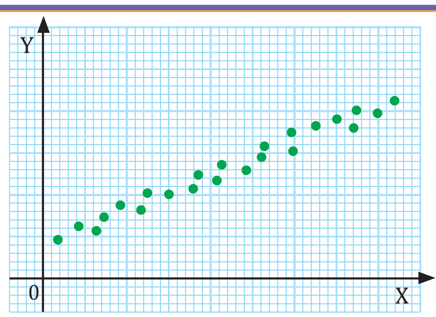
Decimos que existe correlación positiva entre las variables X e Y.



Al aumentar los valores de X, disminuyen los valores de Y.

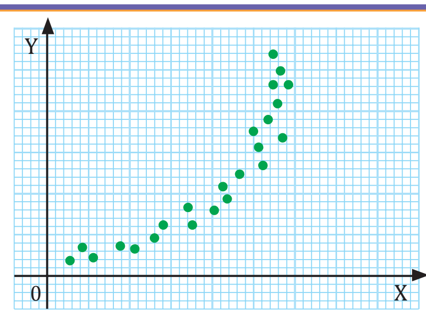
Decimos que existe correlación negativa entre las variables X e Y.

Tabla 16.



La nube de puntos se distribuye en torno a una línea recta.

Decimos que existe correlación lineal entre las variables X e Y.



La nube de puntos se distribuye en torno a una curva no lineal.

Decimos que existe correlación curvilínea entre las variables X e Y.

Tabla 17.

9.4. Coeficiente de Pearson

Veamos cómo podemos obtener una medida cuantitativa de la correlación existente entre dos variables estadísticas.

Si tenemos en cuenta únicamente el caso de la correlación lineal, consideramos el llamado coeficiente de Pearson.

Para llegar a la expresión de este coeficiente, debemos definir antes un nuevo parámetro estadístico, llamado covarianza.

> Llamamos covarianza, σ_{XY}, de una variable bidimensional (X,Y) al parámetro estadístico definido por una de las siguientes expresiones equivalentes:
>
> $$\sigma_{XY} = \frac{\sum_{i,j}(x_i - \bar{x})\cdot(y_j - \bar{y})\cdot n_{ij}}{N} \qquad \sigma_{XY} = \frac{\sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{N} - \bar{x}\cdot\bar{y}$$

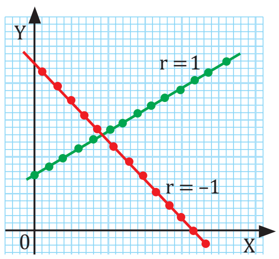
- x_i e y_j son los valores que toman X e Y, en el caso de datos no agrupados, y las marcas de clase de los intervalos en que se agrupan los datos, en el caso de datos agrupados en intervalos.
- n_{ij} es la frecuencia absoluta de cada par de valores (x_i, y_j).
- N es el total de datos de la distribución.

Ahora, ya podemos introducir el coeficiente de Pearson:

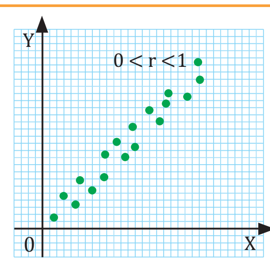
> El coeficiente de Pearson, r, de una variable bidimensional (X, Y) es un parámetro estadístico definido por la expresión:
>
> $$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Se puede demostrar que este coeficiente está siempre comprendido entre -1 y 1.

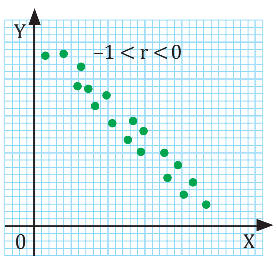
La relación que existe entre el coeficiente de Pearson y la correlación se puede observar en los siguientes diagramas de dispersión.



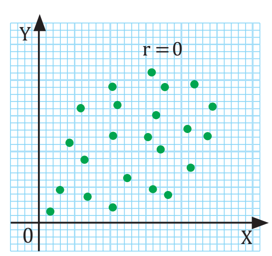
Si $r = +1$ o $r = -1$, existe una dependencia funcional entre X e Y que expresamos mediante una recta.



Si $0 < r < 1$, existe correlación lineal positiva entre X e Y, tanto más fuerte cuanto más próximo esté r de +1.



Si $-1 < r < 0$, existe correlación lineal negativa entre X e Y, tanto más fuerte cuanto más próximo esté r de -1.



Si $r = 0$, no existe correlación lineal entre X e Y.
Esto no excluye que entre las variables X e Y pueda haber algún tipo de correlación curvilínea.

Tabla 18.

9.5. Regresión lineal

Uno de los objetivos que perseguimos al estudiar conjuntamente dos variables X y Y es encontrar alguna manera de predecir los valores de una, conociendo los de la otra.

En este sentido, es lógico pensar que si hay una curva sobre la que se agrupan aproximadamente los puntos de un diagrama de dispersión, esta ha de dar una aproximación de los valores reales, tal y como puedes ver en la figura 4 de la derecha.

El análisis que pretende determinar la curva que mejor aproxima este diagrama de dispersión recibe el nombre de regresión.

En este libro, estudiaremos el caso de la regresión lineal, es decir, la determinación de la recta que mejor aproxima una nube de puntos.

Rectas de regresión y predicciones

Es fácil hallar una recta que se ajuste aproximadamente a una distribución. Basta con dibujar la que a simple vista nos parezca más representativa de la nube de puntos. Sin embargo, este es un método subjetivo.

Para evitar este problema, consideramos algún criterio que permita determinar objetivamente la recta que se ajusta mejor a la distribución. El más utilizado es el llamado criterio de los mínimos cuadrados.

y= A + Bx Recta mínimos cuadrados, donde A y B se obtiene del sistema

$$\left.\begin{aligned} \overline{Z}y &= nA + BZx \\ \overline{Z}xy &= AZx + BZx' \end{aligned}\right\} \text{ E - Normales}$$

Según este criterio, podemos demostrar que la recta es:

$$y = A + Bx \text{ donde } A = \overline{y} - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\,\overline{x} \quad \text{y} \quad B = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

También podemos expresar la recta de la forma siguiente:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \overline{x})$$

A esta recta la conocemos como recta de regresión de Y sobre X.

Esta recta permite predecir, para un valor x, el valor y que cabe esperar que presente un individuo de la población. Sin embargo, puesto que el resultado es sólo una predicción, el valor obtenido no será en general el valor real, sino una estimación de éste que denotamos por $\hat{y}$.

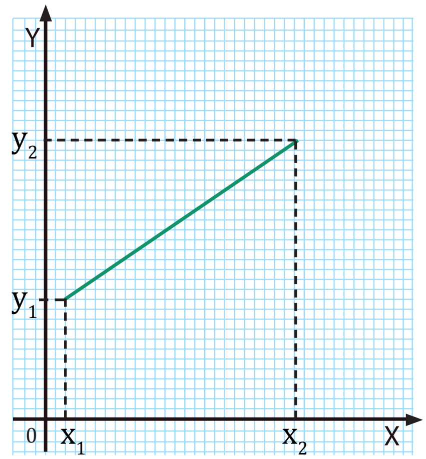


Fig. 4.

Y TAMBIÉN:

Minimos cuadrados

El método de mínimos cuadrados proporciona una recta que se ajusta a la distribución de manera que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los datos teóricos y los reales lo menor posible.

Y TAMBIÉN:

Aplicación de la regresión lineal

En ingenieria mecánica:
En esta rama se utiliza la regresión lineal para ajustar la recta de París, una ecuación que sirve para estudiar elementos sometidos a fatiga en función del número de ciclos a los que se somete un material.

Análogamente, si nos interesa hacer predicciones de un valor x a partir de un valor y, debemos intercambiar el papel de ambas variables. Consideraremos, en este caso, la recta de regresión de X sobre Y:

$$y = A + Bx \text{ donde } A = \overline{y} - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^{2}}\,\overline{x} \quad \text{y} \quad B = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^{2}}$$

La forma alternativa de esta recta es:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^{2}}(x - \overline{x})$$

En este caso, denotamos la estimación proporcionada por la recta de regresión para un valor conocido de y por $\hat{x}$.

En general, la recta de regresión de Y sobre X y la de X sobre Y no coindicen. Sin embargo, siempre se cumple que:

- Ambas rectas están tanto más próximas cuanto mayor es el grado de correlación lineal entre X e Y.
- Si existe dependencia funcional entre X e Y , ambas rectas coinciden.
- Si X e Y son independientes, las rectas son perpendiculares entre sí y paralelas a los ejes.

Valoración de las predicciones

La recta de regresión nos permite predecir valores de una variable a partir de los de otra. No obstante, hay que tener siempre presente que existen las siguientes limitaciones:

- Las predicciones realizadas a partir de una recta de regresión no son fiables si entre X e Y no hay un alto grado de correlación lineal; es decir, si r no es, en valor absoluto, cercano a 1.
- La fiabilidad de una recta de regresión es mayor cuanto mayor sea el número de datos considerados para calcularla.
- Las predicciones obtenidas para valores próximos al punto medio de la distribución son más fiables que las obtenidas para valores muy alejados.

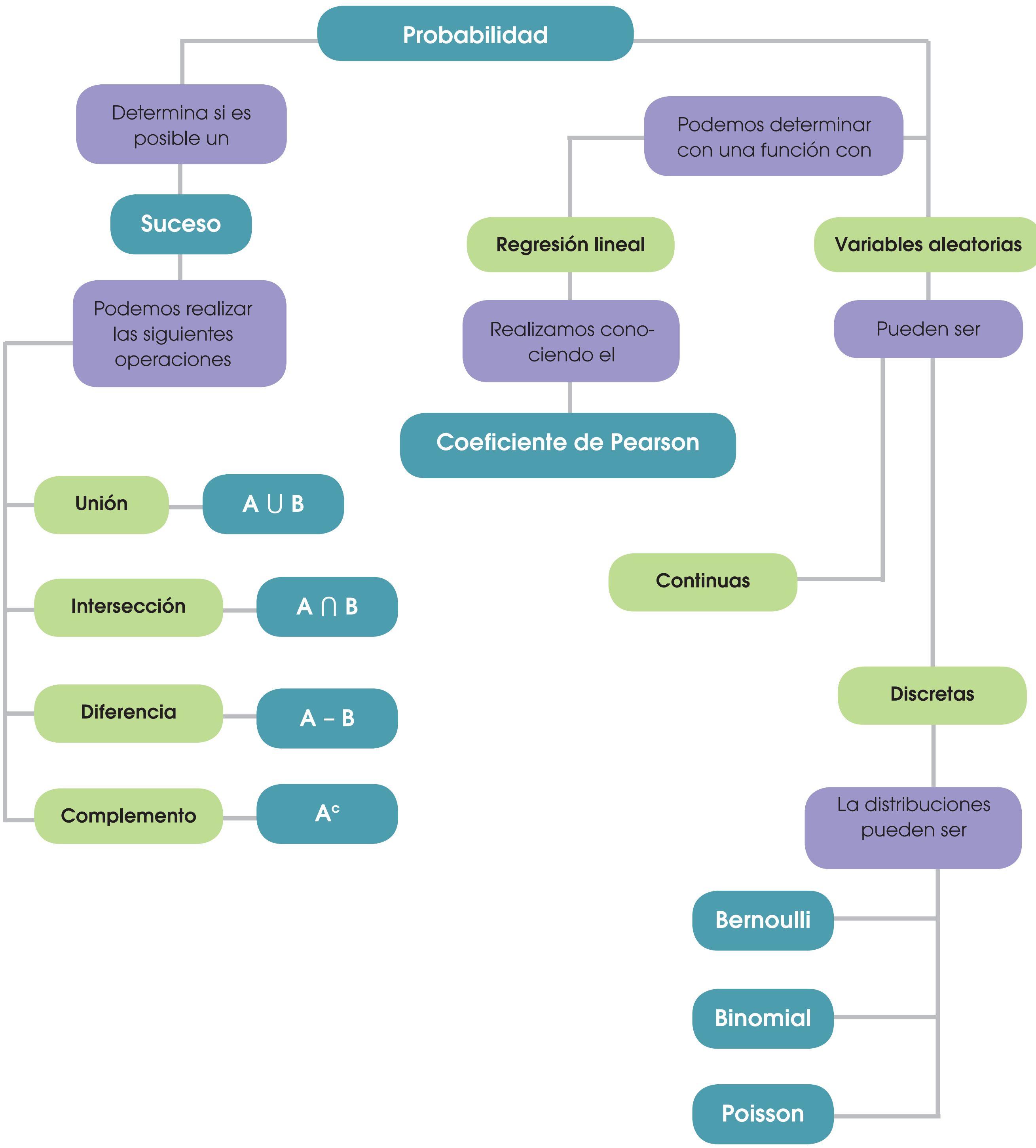
Y TAMBIÉN: ¿?



https://goo.gl/pBeqb6

Johann Karl F. Gauus
Matemático alemán (1777-1855).
Sus valiosas aportaciones en diversos campos de las matemáticas y la física lo convierten en uno de los más importantes científicos del siglo XIX.
Con sus trabajos sobre astronomía, fue uno de los primeros en estudiar la distribución normal, a la que suele llamarse, en su honor, campana de Gauss.

6 Resumen



Probabilidad
Determina si es posible un
Suceso
Podemos realizar las siguientes operaciones
Unión
A ∪ B
Intersección
A ∩ B
Diferencia
A – B
Complemento
Aᶜ
Podemos determinar con una función con
Regresión lineal
Realizamos conociendo el
Coeficiente de Pearson
Variables aleatorias
Pueden ser
Continuas
Discretas
La distribuciones pueden ser
Bernoulli
Binomial
Poisson

A

1. En un hospital se está experimentando un medicamento que regula la temperatura corporal. Para ello, se administran diferentes dosis del producto a 10 pacientes con fiebre alta, y se observa cuánto tiempo tarda en normalizarse completamente su temperatura. Se obtienen los siguientes resultados.

Responde:

¿Cuánto tiempo cabe esperar que tarde en normalizarse la temperatura de un paciente al que se le han administrado 11,5 mg del medicamento? ¿Y si toma una dosis de 25 mg?

Dosis (mg)	Tiempo (min)	Dosis (mg)	Tiempo (min)
2	136	12	60
4	126	14	55
6	115	16	42
8	98	18	38
10	75	20	31

Solución

Comprender

A partir de una distribución de datos, realizaremos una predicción del efecto que tendrá sobre la temperatura corporal la prescripción de una determinada dosis del medicamento que se está experimentando. Los datos corresponden a dos variables: la dosis de medicamento (X) y el tiempo que tarda en normalizarse la temperatura (Y).

Planificar

- Representaremos un diagrama de dispersión y observaremos la relación que existe entre las variables y, en caso de dependencia estadística, el grado, el sentido y el tipo de la correlación.
- Calcularemos el coeficiente de Pearson y valoraremos un posible ajuste mediante una recta de regresión.
- Hallaremos la recta de regresión de Y sobre X.
- Realizaremos una predicción del tiempo que tardará en normalizarse la temperatura para las dosis del medicamento del enunciado.

Ejecutar el plan

- Representamos la distribución en un diagrama de dispersión. A simple vista, podemos concluir que existe una fuerte correlación lineal negativa.
- Calculamos el coeficiente de Pearson. Para ello, encontraremos los parámetros estadísticos necesarios:

$$\sigma_X = 5.745 \quad \sigma_Y = 36.609 \quad \sigma_{XY} = -207$$

Por tanto:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{207}{5.745 \cdot 36.609} = -0{,}984$$

Comprobamos que existe una correlación lineal negativa muy fuerte, puesto que $r \approx -1$

- Determinamos la recta de regresión de Y sobre X. Para ello, hallamos previamente que $x = 11$ y $y = 77.6$:

$$A = \bar{y} - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = -\frac{207}{(5.745)^2} = -6.272$$

La recta buscada es: $y = 146 - 6.272x$

- Estimamos los valores de $\hat{y}_{11.5\ mg}$ y $\hat{y}_{25\ mg}$ correspondientes a $x = 11.5$ mg y $x = 25$ mg:

$$\hat{y}_{11.5\ mg} = 74.47 \text{ min} \quad \hat{y}_{25\ mg} = -10.2 \text{ min}$$

Respuesta

Si administramos al enfermo 11,5 mg del medicamento, cabe esperar que su temperatura se normalice al cabo de 74,47 minutos. En cambio, si le administramos 25 mg, su temperatura se normalizará 10,2 minutos... ¡antes de que se lo tome!

A pesar de que el grado de correlación es alto, la segunda predicción no es fiable, porque está muy alejada del punto medio de la distribución.

Ejercicios y problemas

1 Probabilidad

1. Se lanza un dado dos veces. **Calcula** la probabilidad de los sucesos siguientes.

   a. La suma de las caras es 5.

   b. La suma de las caras es 10.

   c. La suma de las caras es menor o igual que 5.

2. Los datos de votantes en las últimas elecciones correspondientes a una determinada ciudad muestran que el $73{,}5\%$ de los hombres censados ejerció su derecho a voto, mientras que el porcentaje de mujeres censadas que no lo ejerció fue del $42{,}9\%$. El censo de esta ciudad está compuesto por un 48% de hombres y un 52% de mujeres.

   De entre todas las personas censadas, escogemos una al azar. **Calcula** la probabilidad de que esta persona.

   a. Haya votado.

   b. Haya votado y sea hombre.

   c. Sabiendo que ha votado, sea mujer.

3. María y Rosa hacen un examen. La probabilidad de que María lo apruebe es $0{,}6$ y la probabilidad de que lo aprueben ambas es $0{,}1$. **Calcula** la probabilidad de que apruebe María, pero no Rosa.

4. Lanzamos una moneda y un dado. Sean los sucesos A: obtener cara y B: obtener un punto. **Calcula** la probabilidad de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{A} \cap B$, $(\overline{A \cup B})$, $(\overline{A \cap B})$.

5. ¿Cuál es la probabilidad de no coger ningún doble al seleccionar al azar tres fichas de un dominó? ¿Y la de coger alguno?

6. Ana y Ramón reciben, cada uno, $ 2 diarios. Ana los guarda. Ramón los apuesta a un juego de azar en el que puede ganar $ 10 con probabilidad $0{,}1$ o perder la apuesta con probabilidad $0{,}9$. ¿Quién actúa más juiciosamente a largo plazo?

7. Esteban y Teresa son usuarios habituales del tren. Esteban siempre paga su pasaje. Teresa, en cambio, lo usa sin pagar. El viaje cuesta $ 0,68 y el revisor pone una multa de $ 50 cuando detecta un viajero sin pasaje, lo que ocurre en un 15% de los casos. ¿Cuál de los dos actúa más inteligentemente?

8. La probabilidad de que en determinado momento cada uno de los seis miembros de una familia quiera ver la televisión es $0{,}2$. Sabiendo que a ninguno de los seis le gusta el mismo programa, ¿cuántos televisores debe haber en la casa para que todos puedan ver su programa favorito al menos en un 90% de los casos?

9. Un examen consta de 12 preguntas. Para cada una de ellas se proponen tres posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. ¿Cuántas respuestas acertadas deben exigirse para aprobar, como mínimo, si la probabilidad de que alguien lo apruebe contestando al azar no debe ser superior al 2%?

10. Una pastelería empaqueta cajitas de bombones. La probabilidad de que un bombón esté relleno de mermelada es $0{,}1$ y la de que esté relleno de crema, $0{,}9$. Si una chica compra tres cajitas con cuatro bombones cada una, ¿cuál es la probabilidad de que en todas ellas haya algún bombón relleno de mermelada?

11. Una máquina fabrica cierto tipo de circuito integrado. Este circuito se comercializa en lotes de cinco unidades, de los que compramos seis. Si sabemos que la probabilidad de que un circuito tenga algún defecto de fabricación es $0{,}01$, **calcula** las siguientes probabilidades:

    a. Al menos uno de los lotes contiene algún circuito defectuoso.

    b. En todos los lotes hay algún circuito defectuoso.

    c. Tres lotes contienen algún circuito defectuoso.

12. Una academia de enseñanza de inglés evalúa a sus estudiantes con una prueba de cuatro *test*. Cada uno de estos consta de 10 preguntas con cuatro respuestas posibles.

    Si contestásemos al azar todas las preguntas de todos los *test*, **calcula** las siguientes probabilidades:

    a. Superar la evaluación, si han de aprobarse por separado al menos tres de los cuatro *test*.

    b. No superar la evaluación.

    c. Aprobar al menos dos de los *test*.

13. **Describe** una variable aleatoria adecuada a cada una de las siguientes situaciones e **indica** en cada caso si es discreta o continua.

a. De una urna en la que hay tres bolas numeradas del 1 al 3 sacamos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos de ellas. Si el primer número es mayor que el segundo, cobramos \$ 0.1. En caso contrario, pagamos \$ 0,02.

b. Un alumno responde al azar a las sucesivas preguntas que le hace su profesor hasta que acierta. Si acierta la primera, obtiene una nota de 10; si falla la primera y acierta la segunda, obtiene una nota de $\frac{10}{2}$; si falla la segunda y acierta la tercera, obtiene una nota de $\frac{10}{3}$; etc.

c. Seleccionamos al azar un número k cualquiera del intervalo $[0,1]$ y calculamos el área del cuadrado de lado k.

14. **Considera** una variable aleatoria X cuya función de probabilidad es:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x^2+1} & x=-2,-1,0,1,2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Halla el valor de k.

15. **Halla** la función de probabilidad de una variable aleatoria X sabiendo que solo toma los valores 1, 2 y 3, que su esperanza matemática es $2{,}1$ y que su desviación típica es $0{,}7$.

16. **Responde**: ¿Cuánto vale la varianza de una variable aleatoria $X \sim B(50, p)$ si su esperanza es $\mu = 20$?

17. ¿Cuál es la función de probabilidad de una variable aleatoria $X \sim B(n, p)$ cuya esperanza es $1{,}5$ y cuya varianza es $1{,}05$?

18. Se sortean, entre 500 boletos, un premio de \$ 100 y nueve premios de \$ 10. Si cada boleto se vende al precio de \$ $0{,}5$.

a. ¿Es rentable para el jugador participar?

b. ¿Qué beneficio le queda al organizador, por término medio, en cada boleto?

19. Un jugador extrae al azar una carta de una baraja, de tal manera que gana \$ 10 si saca un As, \$ 1 si saca una J, Q o K y no gana nada si saca cualquier otra carta.

a. El organizador del juego cobra \$ 1,5 por cada extracción. ¿Qué beneficio obtendrá, en promedio, en cada una de ellas?

b. ¿Cuánto debe cobrar por extracción el organizador si el juego debe ser equitativo?

20. Tras apostar cierta cantidad, se lanzan a la vez una moneda y un dado. Si en la moneda sale cara, el jugador cobra \$ 1 cuando la puntuación del dado es par, y \$ $0{,}5$ cuando es impar. Si sale cruz, el jugador recupera la apuesta si la puntuación del dado es un 6, pero pierde lo apostado si es cualquier otra. ¿Cuánto debe cobrar el organizador del juego por apuesta si quiere obtener un beneficio medio de \$ $0{,}05$ por lanzamiento?

21. Un juego consiste en lanzar cuatro monedas y apostar por el número de caras que van a salir. ¿Por qué número deberías apostar?

22. La probabilidad de obtener 1 al lanzar un dado trucado es $0{,}4$. ¿Cuál es el número de veces que cabe esperar obtener esa puntuación si lo lanzamos 2000 veces?

23. En un centro escolar trabajan siete profesores. Estos preparan sus clases en el mismo centro con probabilidad $0{,}3$ y en su casa, con probabilidad $0{,}7$. ¿Cuántas mesas de trabajo debe haber, como mínimo, para que todos los profesores que decidan preparar sus clases en el centro puedan hacerlo en, al menos, un 90% de los casos?

24. Una máquina produce piezas defectuosas en un 5% de los casos. Si se toman ocho piezas al azar, **calcula** la probabilidad de que:

a. No haya ninguna defectuosa.

b. Haya alguna defectuosa.

c. Haya más de una defectuosa.

25. Una máquina fabrica envases plásticos para medicamentos mediante inyección de aire. Se ha estudiado que la probabilidad de que un envase presente algún defecto es $0{,}05$. Si los envases se comercializan en cajas de cinco, **calcula** la probabilidad de que al comprar seis cajas, exactamente dos de ellas contengan algún envase defectuoso.

Para finalizar

1. Se extraen dos cartas de una baraja de 52 cartas en dos extracciones consecutivas. Sean los sucesos A_1 : la primera es J, Q o K; A_2 la segunda es J, Q o K; B_1: la primera es de corazones; B_2 : la segunda es de corazones. **Halla** la probabilidad de los sucesos $A_1 \cap A_2$ y $B_1 \cap B_2$ en caso de que:

   a. Haya reposición de la primera carta.

   b. No haya reposición de la primera carta.

2. En un estudio de un inventario se determinó que, en promedio, la demanda por un artículo en particular en una bodega era de 5 veces al día. Cuál es la probabilidad de este artículo sea requerido:

   a. Más de 5 veces en un día

   b. Ni una sola vez en dos días

3. De un lote de diez fuegos artificiales, cuatro se seleccionan al azar y se disparan. Si el lote contiene tres proyectiles defectuosos que no explotarán, cuál es la probabilidad de que:

   a. los cuatro exploten

   b. al menos dos no exploten

4. Esta tabla muestra las notas obtenidas por seis estudiantes en dos controles de matemáticas, uno de derivadas (X) y otro de integrales (Y).

x = derivadas	3	5	6	7	7	8
y = integrales	5	6	8	7	7	10

   a. **Calcula** el coeficiente de Pearson e **interpreta** el resultado.

   b. **Halla** la recta de regresión de Y sobre X y la de X sobre Y

   c. **Dibuja** la nube de puntos y **representa** las dos rectas de regresión.

   d. Si un estudiante obtuvo un 4 en el control de derivadas, ¿qué nota cabe esperar que haya obtenido en la de integrales?

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal

  ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? | ¿He cumplido mis tareas? | ¿Qué aprendí en esta unidad?

- Trabajo en equipo

  ¿He compartido con mis compañeros y compañeras? | ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.

- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

La probabilidad y la intuición

La intuición es la facultad de comprender las cosas instantáneamente, sin necesidad de razonarlas. Muchas veces permitimos a la intuición y los presentimientos dictar nuestras decisiones, pero la intuición puede fallarnos fácilmente, sobre todo en problemas referentes a la probabilidad. Por ejemplo, ¿crees que en una familia con cuatro hijos sea más probable que dos sean hombres y dos mujeres, o que haya más de un sexo que de otro?

La intuición nos dice que la probabilidad de que haya tantos hombres como mujeres debe ser mayor, pues hay 50% de probabilidad de que uno sea hombre o mujer. La verdad es que es más probable que haya 3 hijos del mismo sexo. Puedes comprobarlo por ti mismo mediante una tabla.

He aquí otro ejemplo. ¿Cuál crees que sea la probabilidad de que en tu aula de clases haya dos personas con el mismo cumpleaños? Seguramente el número debe ser bajo; después de todo, hay 365 días de los cuales escoger, y pocas personas entre las cuales comparar.

De hecho, si tomas 23 personas cualquiera, la probabilidad de que dos de ellas tengan el mismo cumpleaños es del 50%. Con tan solo 59 personas, la probabilidad asciende al 99%. ¡Intenta comprobarlo!

SENTIDO CRÍTICO

El problema de Monty Hall



http://goo.gl/lkANZN

En los años 60, en los Estados Unidos se llevaba a cabo el programa concurso de televisión *Trato Hecho* (*Let's Make a Deal* en inglés). En este programa, el presentador, llamado Monty Hall, ofrecía a alguien de la audiencia la oportunidad de llevarse un flamante auto deportivo.

El concurso consistía en lo siguiente: Monty Hall mostraba al participante tres puertas. Detrás de una de ellas se encontraba el auto, pero detrás de las otras dos se hallaban dos cabras como premios falsos.

El participante, sin saber cuál era la puerta correcta, escogía una de las puertas. Al saber cuál era la puerta correcta, Monty Hall abría una de las puertas restantes para mostrar una de las cabras. Entonces daba al participante la opción de cambiar de puerta o quedarse con su elección inicial, antes de revelar lo que está detrás de las puertas. ¿Qué harías tú en este caso?

Este problema ha sido discutido por décadas ya, tanto entre matemáticos, estadísticos y gente en general, a pesar de que sabemos la respuesta. Intenta crear una tabla de las posibilidades, basándote en la posición inicial del premio detrás de las puertas, y mira si hubieses tenido más probabilidades de ganar o no.

SI YO FUERA....

Administrador de empresas



http://goo.gl/cjSuya

me dedicaría a planear, diseñar, organizar y dirigir el uso de recursos, la ejecución de tareas y proyectos, la evaluación de trabajadores, y la reorientación de procesos para que una empresa optimice su eficacia y sus ganancias.

Para realizar este trabajo, debería conocer datos acerca de la empresa, que pueda cambiar para mejorar la producción final. Por medio de estudios estadísticos de mercadeo o de operaciones y finanzas, podría fácilmente saber cómo llevar a la empresa adelante.

UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO

ELEGIMOS

¿Alguna vez te has preguntado si el clima afecta el humor de tu perro? ¿O si la cantidad de picante de un ají afecta sus ventas? El mundo está lleno de oportunidades para realizar estudios estadísticos. La estadística se puede aplicar en todo tipo de empresa para mejorar un producto, dar un mejor servicio o encontrar lo que busca un consumidor.

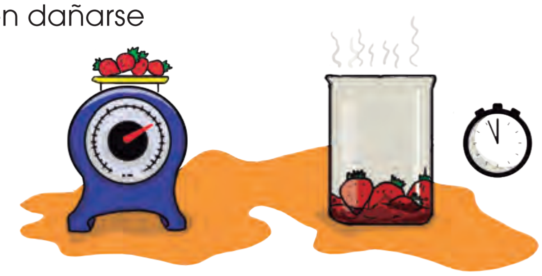
En este proyecto, responderás tú mismo estas inquietudes y buscarás relaciones entre dos variables dependientes e independientes.

12 PLANIFICAMOS

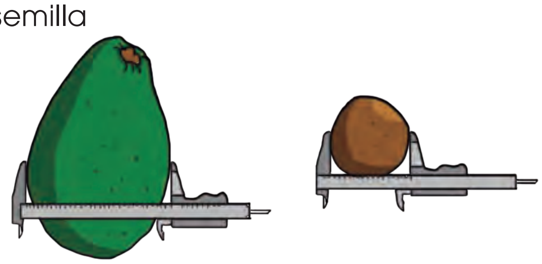
Para ello, debes primero escoger las variables que vas a medir. Puedes usar los siguientes ejemplos o idear uno tú mismo.

Ejemplos:

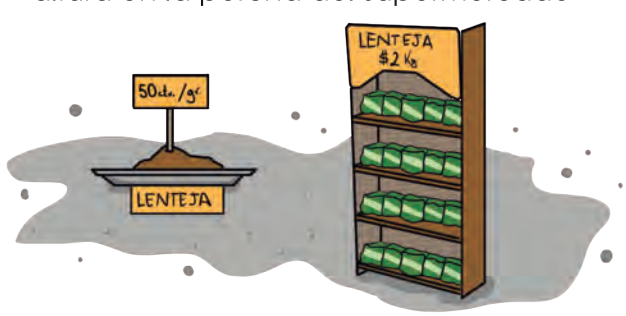
- Peso de una frutilla y el tiempo que toma en dañarse



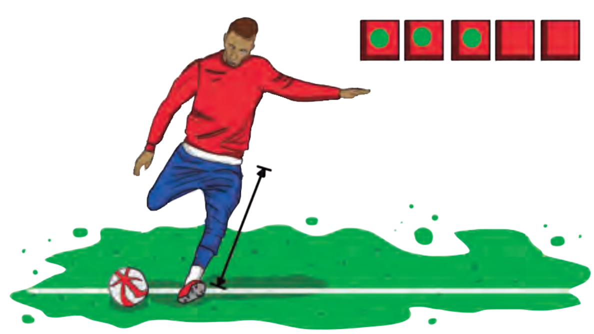
- Diámetro de aguacate y el diámetro de su semilla



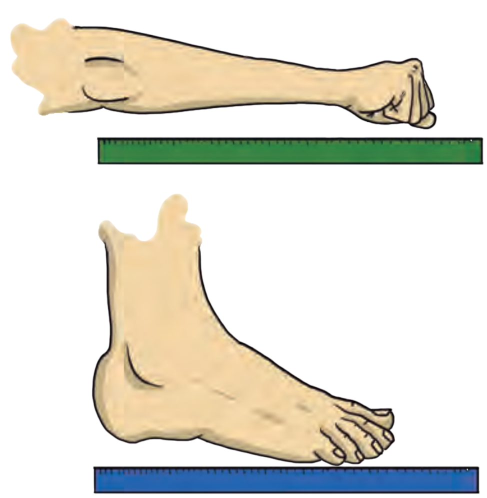
- Precio por gramo de un producto y su altura en la percha del supermercado



- Cantidad de goles anotados desde fuera del área en 5 intentos y largo de la pierna del pateador



- Largo del pie y largo del antebrazo



Proyecto

DESARROLLAMOS

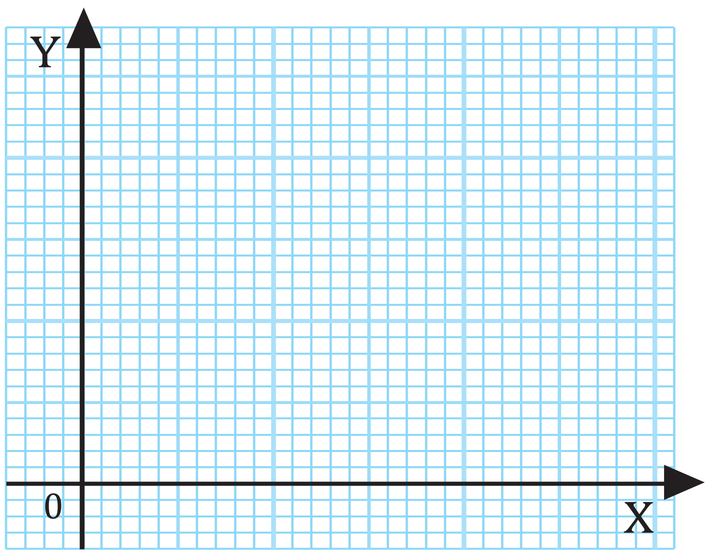
Una vez que hayas hecho las mediciones:

1. **Organiza** los elementos en una tabla.

xi	fi	fai	fr	frp(%)	far
13					
14					
15					
16					

2. **Comprueba** la existencia de dependencia lineal.

3. **Realiza** un diagrama de dispersión. ¿Existe alguna correlación que puedas observar?



4. Si existe dependencia, **busca** una recta de regresión lineal.

5. **Realiza** un análisis y **preséntalo** en un documento escrito.

Un alto en el camino

1. Dados los vectores $\vec{u} = <-2, 1, 4>$, $\vec{v} = <0, 5, 4>$ y $\vec{w} = <1, 5, -2>$, **calcula**.

a. $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$
b. $\vec{v} \times \vec{u}$
c. $\vec{u} \times \vec{w}$
d. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

2. **Estudia** la posición relativa de las rectas r y s, en función de los valores que pueda tomar el parámetro m.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-9}{6-m} = \frac{z-4}{1} \quad y \quad s: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{m+2} = \frac{z-2}{1}$$

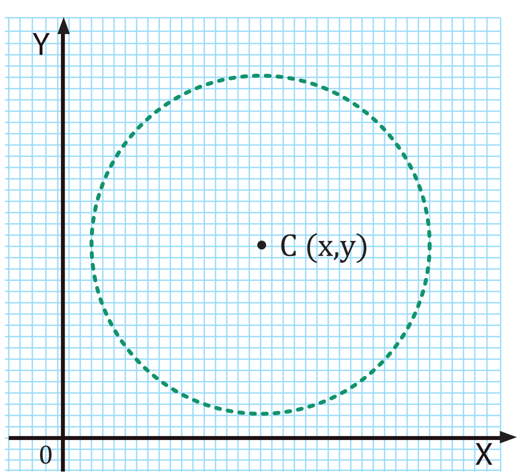
3. **Halla** la distancia entre la recta y el plano dados.

a. $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$; L: $-x + 2y - 3z = 1$

b. $s: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$; L: $x + y + z = 0$

4. El 15% de los clips de determinado modelo son defectuosos y se toma aleatoriamente una muestra de 10 clips. **Halla** la probabilidad de que en dicha muestra haya exactamente 5 clips defectuosos.

5. **Indica** cuál puede ser el coeficiente de Pearson de la distribución de la figura y **justifica** tu respuesta.



6 **Selecciona** la opción correcta.

a. Para calcular el área de figuras planas se puede usar:

- Producto punto
- Producto cruz
- Producto mixto
- Producto por un escalar

b. Si dos rectas se cruzan:

- Coinciden en todos los puntos
- Coinciden en un punto
- Son paralelas
- No coinciden en ningún punto

c. La distribución de Bernoulli mide

- Probabilidad de éxito de un evento en un tiempo determinado
- La probabilidad de éxito de sucesos tras varias repeticiones
- La probabilidad de un solo éxito de un suceso tras varias repeticiones
- La probabilidad de éxito de un solo experimento

d. Si el coeficiente de Pearson entre dos variables es de -0.2:

- Existe correlación positiva entre las variables
- Existe correlación funcional entre las variables.
- Existe correlación débil entre las variables.
- No existe correlación.

7 **Determina** si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si las ecuaciones de tres planos forman un sistema incompatible, los planos son secantes en una recta.

b. El resultado del producto mixto es un escalar.

c. Para determinar un plano bastan 3 puntos.

d. La esperanza de la distribución de Poisson está dada por $n \cdot p$.

e. La desviación estándar de la distribución binomial está dada por $n \cdot p \cdot q$.

BIBLIOGRAFÍA

— ALSINA, C. TRILLAS, E. (1996). *Lecciones de álgebra y geometría*. Barcelona: Ed. Gustavo Gili.

— APÓSTOL, T. M. (1999). *Calculus* (2 vol.). Barcelona: Ed. Reverté, 2.ª edición.

— BARTLE, R. G y SHERBERT, D. R. (1996). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Ciudad de México: Ed. Limusa, 2.ª edición.

— BERNIS, F., MALET, A. y MOLINAS, C. (1999). *Curso de problemas de matemáticas*. Madrid: Ed. Noguer.

— BOYER, C. B. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza editorial.

— COURANT, R. y ROBBINS, H. (1979). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Ed. Aguilar.

— CUADRAS, C. M. (1999). *Problemas de probabilidades y estadística*. 2 vol. Barcelona: PPU.

— Colección «Matemáticas: cultura y aprendizaje». Madrid: Ed. Síntesis.

— DE GUZMÁN, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Ed. Labor.

— GRANDVILLE, W. A. (2009). Cálculo diferencial e integral. Limusa.

— HUSSING, H. y ARNOLD, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

— KLINE, M. (1974). *Matemáticas en el mundo moderno*. Barcelona: Ed. Blume.

— MASON, S. (1996). *Historia de las ciencias*. 5 vols. Madrid: Alianza editorial, 4.ª reimpresión.

— MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: MEC y Ed. Labor.

— MATAIX, J. L. (1970). *Teoría de errores*. Madrid: Ed. Dossat.

— PAPOULIS, A. (1980). P*robabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos*. Barcelona: Ed. Eunibar.

— POLYA, G. (1992). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Ciudad de México: Ed. Trillas.

— QUEYSANNE, M. (1999). *Álgebra básica*. Barcelona: Ed. VicensVives, 2.ª edición.

— RAMOS, A. (2003). *Ejercicios de geometría*. Madrid: Ed. Tebar Flores.

— SPIVAK, M. (1995). *Calculus*, Barcelona: Ed. Reverté, 2.ª edición.

— SERRES, M. (2001). *Historia de las ciencias.* Madrid: Ed. Cátedra, Colección Teorema.

— XAMBÓ, J. (1977). *Álgebra lineal y geometrías lineales*. Barcelona. Ed. Eunibar.

— WHIMBEY, A. y LOCKHEAD, J. (2003). *Comprender y resolver problemas*. Madrid: Visor Distribuciones.

INTEGRALES INDEFINIDAS INMEDIATAS

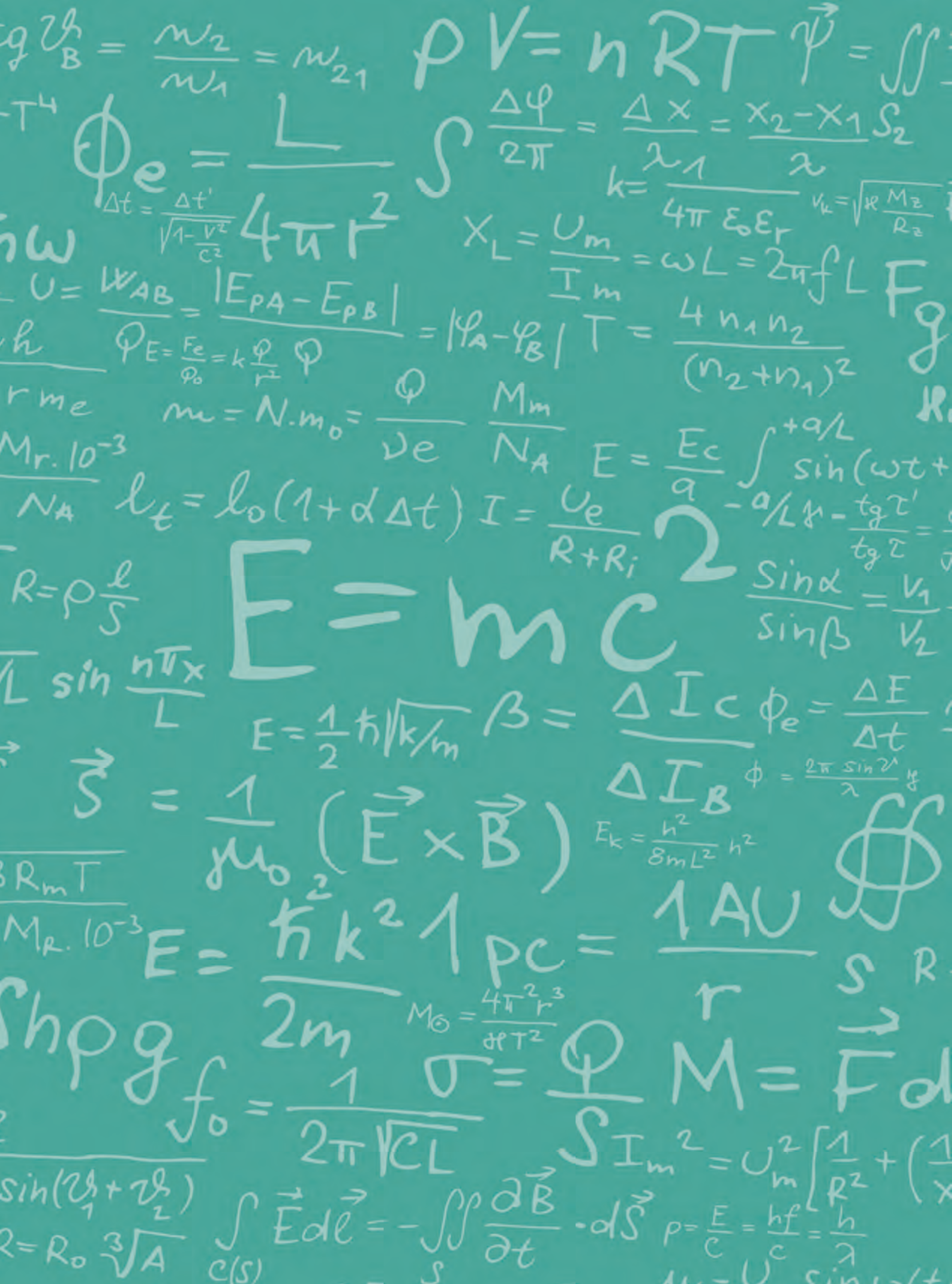
Tabla de teoremas de integrales indefinidas inmediatas

- $\int 0dx = C$
- $\int dx = x + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \forall a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$
- $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + C$
- $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cotg } x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc sen } x + C$
  $= -\text{arc cos } x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arc tg } x + C$
  $= -\text{arc cotg } x + C$

INTEGRALES INDEFINIDAS INMEDIATAS CON REGLA DE LA CADENA

Propiedades generalizadas de integrales inmediatas

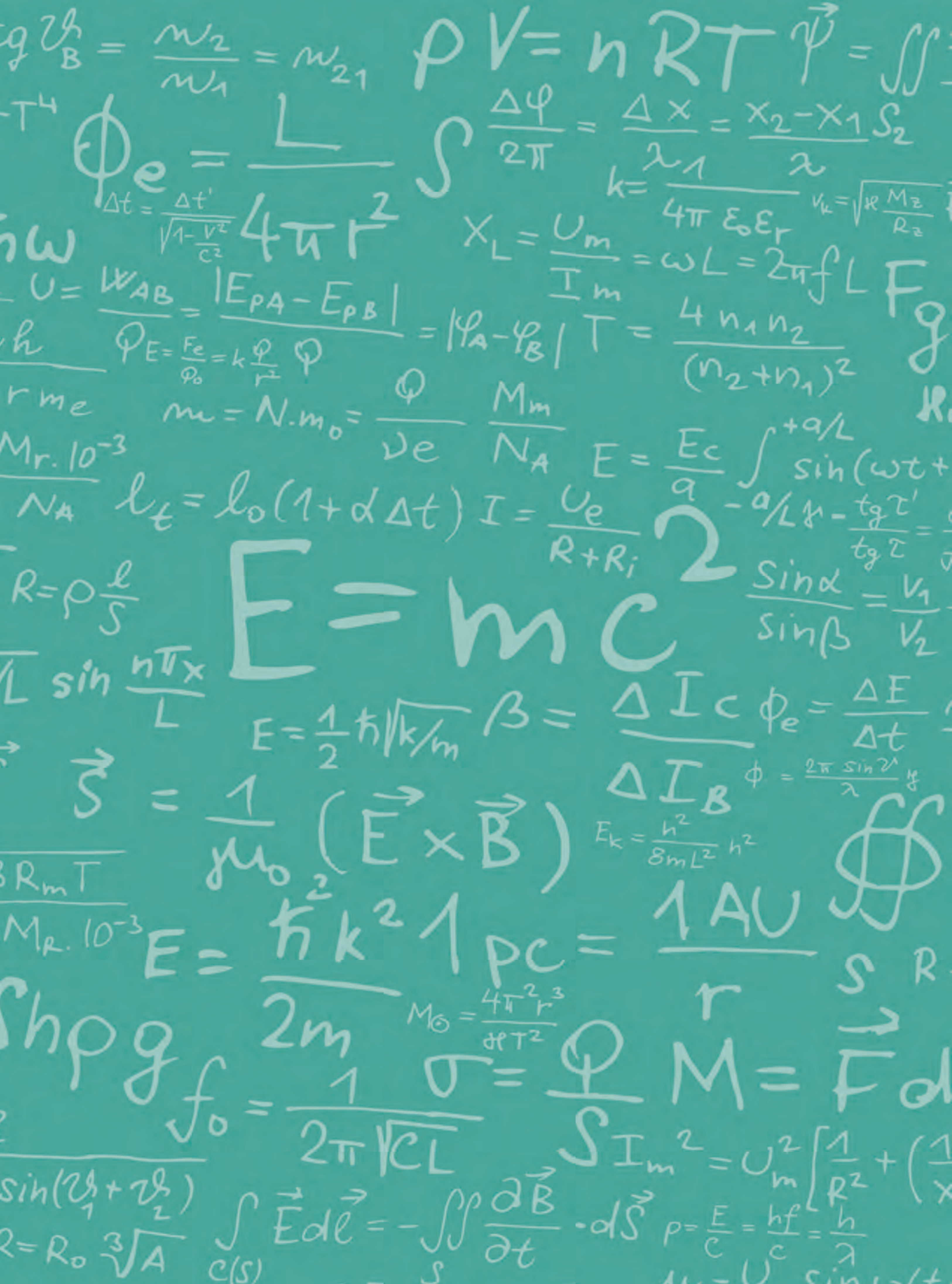
- $\int g(x))^n g'(x)\, dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$
  $(\forall n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{g(x)} g'(x) dx = \ln g(x) + C$
- $\int e^{g(x)} g'(x)\, dx = e^{g(x)} + C$
- $\int a^{g(x)} g'(x)\, dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C, \forall a \in \mathbb{R}^+$
- $\int \text{sen } g(x)\, dx = -\cos g(x) + C$
- $\int \cos g(x)\, g'(x) dx = \text{sen } [g(x) + C]$
- $\int \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)} dx = \text{tg } [g(x)] + C$
- $\int \frac{g'(x)}{\text{sen}^2 g(x)} dx = -\text{cotg } [g(x)] + C$
- $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}} dx = -\text{arc sen } [g(x)] + C$
  $= -\text{arc cos } [g(x)] + C$
- $\int \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2} dx = \text{arc tg } [g(x)] + C$
  $= -\text{arc cotg } [g(x)] + C$



pV=nRT
E=mc²
R=ρ l/S
lt=lo(1+αΔt)
I= Ue/(R+Ri)
S = 1/μo (E×B)
1 pc = 1AU/r
M=Fd
σ=Q/S
fo=1/(2π√CL)
XL=Um/Im=ωL=2πfL
m=N.mo=Q/νe=Mm/NA
E=Ec/a
sinα/sinβ=V1/V2
E=1/2 ħ√k/m
φe=ΔE/Δt
Ek=h²/8mL² h²
p=E/c=hf/c=h/λ

APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL EN LA FÍSICA

Cinemática	**Variación del espacio recorrido**	**Ejemplo**
	El espacio recorrido entre los instantes t_1 y t_2 por un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con velocidad v es: $$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$ ya que la función posición, x, es una primitiva de v.	Un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con velocidad $v(t) = (4t + 3)m \cdot s^{-1}$. Halla el espacio recorrido entre los 5 s y los 10 s. Basta con aplicar la fórmula correspondiente: $$x(10) - x(5) = \int_5^{10} (4t + 3)dt = \left[(2t^2 + 3t)\right]_5^{10} = 230 - 65 = 165$$ Por tanto, el espacio recorrido por ese móvil entre los 5 s y los 10 s es de 165 m.
	Variación de velocidad	**Ejemplo**
	El incremento de velocidad entre los instantes t_1 y t_2 experimentado por un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con aceleración a es: $$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$ ya que la función velocidad, v, es una primitiva de a.	Un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con aceleración $a(t) = \sqrt{t}\ m{\cdot}s^{-2}$. Halla el incremento de velocidad experimentado entre los 4 s y los 9 s. Aplicamos la fórmula correspondiente: $$v(9) - v(4) = \int_4^9 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2t\sqrt{t}}{3}\right]_4^9 = 18 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}$$ Así, el incremento de velocidad entre los 4 s y los 9 s es $38/3\ ms^{-1}$.
Dinámica	**Trabajo**	**Ejemplo**
	El trabajo realizado por una fuerza F, que actúa en la dirección del movimiento, al desplazar un cuerpo desde un punto $x = a$ hasta otro punto $x = b$ es: $$W = \int_a^b F(x)\,dt$$	¿Cuál es el trabajo realizado al comprimir un muelle 2 cm si aplicamos una fuerza $F(x) = 5x$ N en la misma dirección del desplazamiento? Expresamos el desplazamiento en metros, 2 cm = 0,02 m, para trabajar con unidades del SI; y aplicamos la expresión del trabajo de una fuerza variable: $$W = \int_0^{0,02} 5\,x\,dx = 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,02} = 5(0,0002 - 0) = 0,001$$ Por tanto, el trabajo realizado es 0,001 J.



pV=nRT
E=mc2